Zur
Berechnung der Proximitäten von Asteroiden-Bahnen.

Inaugural-Dissertation

welche mit Genehmigung

der

philosophischen Facultät hiesiger Universität

zur Erlangung der Doctorwürde

am Mittwoch den 28. März 1883, Vormittags 11 Uhr

in der kleinen Aula

öffentlich vertheidigen wird

Andreas Galle,

Assistent a. d. Kgl. Sternwarte.

Opponenten:

G. Lachmann, Assistent a. d. Kgl. Sternwarte.

L. Lübeck, Cand. math.

H. Reitzenstein, Gerichts-Referendar.

Breslau.

Druck von Grass, Barth & Comp. (W. Friedrich.)

Seinem geliebten Vater

in inniger Verehrung und herzlicher Dankbarkeit

zugeeignet

vom

Verfasser.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543115_0124

Die Frage nach der Möglichkeit einer Annäherung oder eines Zusammenstosses zweier Weltkörper hat, wie es scheint, ihren Ausgang von den Cometen genommen. Zwar hatten die „Principia mathematica philosophiae naturalis“ sie als Wandelsterne dem allgemeinen Gesetze der Bewegung untergeordnet, aber die abergläubische Furcht vor etwaigen schädlichen Einflüssen derselben war nicht gewichen, sondern fand in der Möglichkeit einer Annäherung der ihrer physischen Natur nach räthselhaften Himmelskörper an die Erde neue Nahrung.[1]) Bereits Halley, Newtons berühmter Schüler und Freund, beschäftigte sich mit dieser speciellen Frage, ob unser Planet Begegnungen mit Cometen ausgesetzt sei.[2]) Er hielt solche nicht nur für möglich, sondern erklärte dadurch frühere Veränderungen auf der Erdoberfläche. Whiston, Heyn und Maupertuis führten diese Ideen weiter aus und gaben ihnen Verbreitung.[3]) Ihnen gegenüber glaubte Lambert aus der weisen Einrichtung des Weltganzen schliessen zu dürfen, dass wie bei den Planeten durch die Anordnung der Bahnen der Cometen

---

[1]) Eine ausführliche Darstellung der älteren Geschichte dieser die Cometen betreffenden Frage giebt Olbers in der Mon. Corr. v. Zach XXII, pg. 409, und Astr. Nachr. VI, 128, pg. 165. Ebendaher sind die folgenden Literaturangaben zum Theil entnommen.

[2]) Halley „Some considerations about the cause of the universal deluge“ und „Some further thoughts upon the same subject“ Philos. Transact. Nr. 383, pg. 118, 123.

[3]) Die 5 Auflagen (1696—1737) der von Clüver ins deutsche übersetzten „Neuen Theorie der Erde“ von Whiston beweisen die Allgemeinheit des Interesses. Maupertuis in seinem Briefe: Ueber den Cometen von 1742. Ueber Whiston vergl. Pingré Cométographie Bd. II, über Heyn Olbers citirte Abhandlung.

eine verderbliche Wirkung ausgeschlossen sei.[4]) Im Jahre 1773 wandten sich auch Lalande und Prosperin der Frage zu[5]) und kurz darauf suchte Du Séjour die Möglichkeit von Zusammenstössen und damit die Gefahren, welche nach Maupertuis und Lalande in ihrem Gefolge stehen sollten, als höchst unwahrscheinlich in Abrede zu stellen.[6]) Olbers zeigte freilich, dass seine Rechnung auf einem Trugschluss beruhe, und Laplace behauptete von neuem die Möglichkeit des Ereignisses.[7]) Jedoch gelangten Olbers, Arago u. a. zu demselben Resultat, dass die Wahrscheinlichkeit einer Begegnung äusserst gering sei.[8])

Durch derartige Untersuchungen und mit der wachsenden Erkenntniss der physikalischen Eigenschaften der Cometen verlor die Untersuchung der Annäherung der Cometen an die Erde viel von ihrem anfänglichen Interesse, um bei einer Gruppe neu entdeckter Himmelskörper in anderer Form aufzutauchen.

---

[4]) Lambert, Kosmologische Briefe über die Einrichtung des Weltbaues. Augsburg 1761.

[5]) Lalande, Réflexions sur les comètes qui peuvent approcher de la terre. Paris 1773. Prosperin, De inveniendis punctis proximis parabolae et circuli circa eundem focum descriptorum 1773; ferner in Abh. d. K. Schwed. Akademie der Wissensch. 1775, übersetzt v. Kästner, Bd. XXXVII, pg. 189, u. 1785, übers. v. Kästner u. Brandis, Bd. VI, pg. 256.

[6]) Essay sur les comètes en général et particulièrement sur celles qui peuvent approcher de l'orbite de la terre. Par M. Dionis du Séjour, Paris 1775, s. auch Pingré Cométographie Bd. II.

[7]) Olbers a. a. O. Laplace, Exposition du système du monde 3me éd. Paris 1808. Bd. II.

[8]) Olbers a. a. O. u. Astr. N. IV, pg. 501. Arago, Pop. Astr., übers. v. Hankel, II, pg. 386. S. auch Hind, „die Cometen", übers. v. Mädler 1854, pg. 27 (Zusammenstellung der Cometen, die der Erde nahe kamen) und Zusatz IV (über den Zusammenstoss eines Cometen mit der Erde). Ueber die angebliche Verfinsterung des Mondes durch den Cometen v. 1454 vergl. u. a. Humboldt Kosmos III, pg. 565, v. Zach, mon. Corr. XXIII, 1811, pg. 196–202. Arago, Pop. Astr. II, pg. 334. (Eine solche Verfinsterung ist neuerdings durch den grossen September-Cometen 1882, der vor der Sonne verschwand, noch unwahrscheinlicher geworden.) — Ueber die Annäherung des Lexell'schen Cometen an das System des Jupiters vergl. Kosmos III, pg. 566. Le Verrier in d. Compt. Rend. XIX, 1844, pg. 982—993. Ueber die Cometen von Encke u. Biela J. Littrow in Baumgartners Zeitschrift f. Physik I, pg. 41.

Historische Uebersicht der Untersuchungen über die Asteroiden.[9]) Die Entdeckung der Ceres am ersten Tage dieses Jahrhunderts richtete die Aufmerksamkeit der Astronomen auf einen Punkt, wo neue Probleme ihnen ein reiches Arbeitsfeld eröffnen sollten, auf den Zwischenraum zwischen Mars und Jupiter, wo bereits Kepler mit bestimmten Worten einen Planeten angenommen hatte.[10]) Bereits an die Auffindung der ersten vier dieser Himmelskörper knüpfte sich die Frage nach ihren gegenseitigen Lagenverhältnissen. Die nicht erfüllte Erwartung, einen einzigen grossen Planeten zu finden, und der zufällige Umstand, dass sie nahe an derselben Stelle des Himmels gefunden wurden, legten die von Olbers aufgestellte, von Zach vertheidigte Hypothese nahe, dass die entdeckten nur Trümmer eines ehemaligen grossen Planeten seien. Die von Gauss und auf dessen Veranlassung von Encke angestellten Rechnungen machten diese Annahme sehr unwahrscheinlich, die immerhin, wie man weiss, der Astronomie einen guten Dienst erwiesen hatte.[11])

Mit der Zunahme der Entdeckungen in der zweiten Hälfte des gegenwärtigen Jahrhunderts und bei der geringen Ausdehnung des Raumes, auf den der ganze Planetenring beschränkt blieb, machte sich das Bedürfniss immer mehr fühlbar, eine Uebersicht der räumlichen Vertheilung der einzelnen Planetenbahnen zu gewinnen. Einige versuchten die Olbers'sche Hypothese auch nach der Entdeckung weiterer Glieder der Planetengruppe aufrecht zu halten.[12]) Diesen Untersuchungen

---

[9]) Den von Herschel d. ä. eingeführten Namen „Asteroiden" (cf. Gould on the orbits of the asteroids) werde ich mit der vom Berl. astr. Jahrbuch acceptirten Bezeichnung „kleine Planeten" unterschiedslos gebrauchen.

[10]) Mysterium cosmogr. 1596, pg. 7. Opera omnia ed. Ch. Frisch, Bd. I, pg. 107.

[11]) Olbers im Berl. astr. Jahrbuch 1805, pg. 108. Mon. Corr. VI, pg. 88. v. Zach in Mon. Corr. X, pg. 377.

[12]) Mauvais: Compt. Rend. XXII, 1846, pg. 157. Daniel Kirkwood suchte sogar den Urplaneten aus seinen Theilen wieder herzustellen: Report of the British Association 1850, pg. XXXV. cf. Humboldt Kosmos III, pg. 550, Note 67. Mit demselben Gegenstand beschäftigten sich Plana, Callandreau u. a. (Vergl. die Literatur in Houzeau et Lancaster Bibliographie de l'astronomie.)

von vorzugsweise historischem Interesse gegenüber liegen die von B. A. Gould „über die gegenseitige Lage der Bahnen der zwischen Mars und Jupiter sich bewegenden Planeten“ (Göttingen, 1848) unserer Aufgabe näher. Ausser einer Vergleichung der Bahnelemente der damals bekannten 8 Planeten und dem nicht uninteressanten und von Olbers bereits bei Ceres und Pallas bemerkten Resultat, dass die Bahnlinien wie Kettenringe zusammenhingen, findet sich auch eine Besprechung ihrer Annäherungen in den gemeinsamen Schnittlinien. Diese Arbeit erfuhr in der Habilitationsschrift von D'Arrest[13]) eine Erweiterung, einestheils durch Berührung noch einiger anderer Fragen, dann aber durch die Untersuchung derselben Punkte bei der vermehrten Anzahl von 13 Planeten. Unter den die Topographie der Asteroidenbahnen betreffenden Abhandlungen seien noch die von Kirkwood und Hornstein hervorgehoben, „The asteroids between Mars and Jupiter“ und „Beitrag zur Kenntniss des Asteroidensystems“ betitelt.[14]) Beide haben die Vertheilung der Bahnelemente und der Grössenverhältnisse der Asteroiden nach ihrer Entfernung von der Sonne zum Gegenstand und liegen daher ausserhalb des Bereichs der vorliegenden Betrachtung. Doch habe ich sie hier erwähnt, um später auf die erstere Arbeit zurückzukommen.

Gould und D'Arrest hatten die kürzeste Entfernung zweier Bahnlinien ohne weiteres in die Schnittlinie beider Ebenen verlegt.[15]) Dies ist aber bei Bahnen, deren Ebenen nur wenig gegen einander geneigt sind, nicht gestattet. Grunert behandelte dagegen die Frage in Strenge vom mathematischen Gesichts-

---

[13]) Ueber das System der kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter von Dr. L. D'Arrest, Leipzig 1851.

[14]) Die erstere im Smithsonian Report 1876, pg. 358, die andere in den Sitzungsbericht. d. k. Akademie der Wiss. Wien 1881. LXXXIV, Abth. II. Juni-Heft, ein kurzes Resumé in Schlömilch Zeitschr. f. Math. u. Phys., Jahrgang XXVI, 1881, pg. 394. Hierher gehören auch die Aufsätze von Newcomb in Astr. Nachr. 1746 und Kirkwood Monthly Not. XXV, 1875, pg. 62. Vergl. auch S. Newcomb, Popular Astronomy Part. III, Chapt. III, pg. 323. The small planets.

[15]) Prosperin und Du Séjour waren die einzigen, die diese Annahme nicht machten; sie setzten dagegen bei ihrer Bestimmung der Annäherung von Cometen an die Erdbahn die letztere als kreisförmig voraus.

punkte, doch liess er die Rücksicht auf eine wirkliche Berechnung zurücktreten und auch ein grösseres mathematisches Interesse dürften seine Resultate ihrer Complication wegen nicht beanspruchen.[16]) Kurz sei nur erwähnt, dass er sich der Mittelpunktsgleichungen für die beiden Bahnellipsen bedient, sie auf ein und dasselbe, im übrigen nicht fixirte Coordinatensystem bezieht, jetzt erst die Bedingung des gemeinsamen Brennpunktes einführt und nun die Eingangs für zwei beliebige Curven aufgestellten Bedingungen für die Proximität anwendet. Dasselbe wird für den Fall durchgeführt, dass die Bahnen andere Kegelschnitte als Ellipsen sind. In einer zweiten Abhandlung[17]) bestimmt Grunert die rechtwinkligen Coordinaten der Durchschnittspunkte zweier Bahnen und stellt eine Bedingungsgleichung für ihre Existenz auf. Auch hier eignen sich die Endgleichungen nicht zu wirklicher Ausrechnung.

Die auf engen Raum beschränkte, von Jahr zu Jahr durch neue Entdeckungen sich vergrössernde Gruppe von Planeten, die ihren Dimensionen nach nur mit den Trabanten der Hauptplaneten rivalisiren konnten, hatte zuerst die Frage nach ihrem Ursprung nahe gelegt. Als sich die Hoffnung, ihre Entstehung aus einem Urplaneten zu erklären, trügerisch erwies, betrachtete man sie isolirt und suchte das Gesetz ihrer Vertheilung im Raume zu entdecken. Bei beiden Betrachtungsweisen trat die Frage in den Vordergrund, ob verschiedene Bahnen sich einander beträchtlich näherten, dort, um den Schluss auf die Vergangenheit zu vermitteln, hier aus dem geometrischen Interesse an den in mannigfaltiger Weise sich durchkreuzenden Bahnen gleichzeitig die Sonne umkreisender Gestirne. Im Anschluss daran trat als ein neues Moment die mögliche Einwirkung der Asteroiden auf einander hinzu und damit eine Veränderlichkeit der Bahnelemente durch Störungen anderer als der grossen Planeten, die bei der Unbekanntschaft

---

[16]) Ueber die Proximitäten der Bahnen der Planeten und Cometen. Sitzungsber. d. math.-naturw. Cl. der k. Akad. d. Wissensch. Bd. XIII, pg. 38. Wien 1854.

[17]) Directe Bestimmung der Durchschnittspunkte der Bahnen zweier in Kegelschnitten sich um die Sonne bewegenden Weltkörper. Denkschriften d. Ak. d. Wiss. in Wien 1861. Bd. XIX.

mit den Massen der Körper nicht in Rechnung gezogen werden, andererseits aber zu einer Erkenntniss ihrer Massenverhältnisse führen können.

Diesen letzteren Gesichtspunkt hatte besonders Karl von Littrow im Auge, als er sich im Jahre 1853 der vorliegenden Frage zuwandte, die ihn während zwei Decennien beschäftigt hat. Durch die Voraussagung thatsächlich stattfindender Proximitäten[18]) suchte er die Aufmerksamkeit der Astronomen auf etwa bemerkbare Einwirkungen zu lenken. Wenn seine Bemühungen, soweit mir bekannt ist, noch nicht den gewünschten Erfolg gehabt haben, so ist der Grund wohl darin zu suchen, dass Annäherungen auf sehr kleine Entfernungen eben nicht stattgefunden haben oder dass die Planeten zur Zeit der Proximität nicht beobachtet werden konnten.

Um die Punkte zu erkennen, bei denen eine Neubearbeitung des Gegenstandes beginnen musste, und die Mängel zu beurtheilen, die auch nach den Methoden von Littrow und Linsser (dessen Verfahren mir nur durch Littrow's Abhandlungen bekannt geworden ist) zurückblieben, scheint es mir nöthig, in einem I. Theile eine kurze Analyse dieser Arbeiten einem im II. Theile gegebenen Versuche vorangehen zu lassen, der eine strenge Lösung der vorliegenden Aufgabe bezweckt. Der III. Theil enthält dann einige numerische Anwendungen und Beispiele des im zweiten angegebenen Verfahrens.

I.

1. **Erste Methode von Littrow.** Bevor Littrow die von ihm zur Berechnung der Proximitäten wirklich angewendeten Methoden einschlug, stellte er diejenigen Ausdrücke zusammen, durch welche die Aufgabe in aller Strenge gelöst werde und die hier in Kürze folgen sollen.[19])

---

[18]) Ausser den in Note 19 und 23 anzuführenden Arbeiten in den Sitzungsbericht. der math.-naturw. Cl. der k. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Bd. XXXIX, XLIII, XLV, XLVII, XLIX, LI, LIV, LVI.

[19]) Bahnnähen zwischen den periodischen Gestirnen des Sonnensystems. Sitzungsber. der math.-naturw. Cl. der k. Akad. d. Wiss. Bd. XIII, pg. 38. Wien 1854.

Nachdem durch die Gauss'schen Gleichungen die gegenseitige Neigung J der Bahnen und die Argumente der Breite, welche den Punkten in der gemeinschaftlichen Schnittlinie entsprechen, gefunden sind, so sind ohne weiteres auch die Winkel zwischen den Perihelien und der Knotenlinie[20]) bekannt, die L. mit Ω und Ω_1 bezeichnet. Werden dann die Hilfsgrössen

$$\begin{aligned} A &= \cos\Omega \,.\, \cos\Omega_1 + \sin\Omega \,.\, \sin\Omega_1 \,.\, \cos J \\ A' &= \cos\Omega \,.\, \sin\Omega_1 - \sin\Omega \,.\, \cos\Omega_1 \,.\, \cos J \\ A'' &= \sin\Omega \,.\, \cos\Omega_1 - \cos\Omega \,.\, \sin\Omega_1 \,.\, \cos J \\ A''' &= \sin\Omega \,.\, \sin\Omega_1 + \cos\Omega \,.\, \cos\Omega_1 \,.\, \cos J \end{aligned}$$

eingeführt und die Radien-Vectoren und deren Producte in die sin resp. cos der wahren Anomalieen durch die excentrischen Anomalieen ersetzt, so hängt die Entfernung zweier Punkte der beiden Bahnen nur noch von den excentrischen Anomalieen ab und die Bedingungen des Minimi derselben nehmen die Gestalt an

$$(\mathfrak{a}) \quad \begin{cases} 0 = \alpha \sin(E + B) - a^2e^2 \sin 2E + \alpha' \sin(E + B') \cos E_1 \\ \qquad\qquad + \alpha'' \sin(E + B'') \sin E_1 \\ 0 = \beta \sin(E_1 + C) - a_1{}^2e_1{}^2 \sin 2E_1 + \beta' \sin(E_1 + C') \cos E \\ \qquad\qquad + \beta'' \sin(E_1 + C'') \sin E \end{cases}$$

aus denen E und E_1 zu finden wären. Die Werthe der dabei auftretenden Constanten mögen hier noch Platz finden, um bei Gelegenheit einen bei Littrow vorgekommenen kleinen Fehler zu berichtigen:[21])

$$\begin{aligned} 2\,a^2e - 2aa_1e\,A &= \alpha \cos B \\ -\,2\,aa_1\sqrt{1-e^2}\,.\,e_1\,A'' &= \alpha \sin B \\ 2\,aa_1\,A &= \alpha' \cos B' = \beta' \cos C' \\ 2\,aa_1\sqrt{1-e^2}\,A'' &= \alpha' \sin B' \\ -\,2\,aa_1\sqrt{1-e^2}\,A' &= \alpha'' \cos B'' \\ -\,2\,aa_1\sqrt{1-e^2}\sqrt{1-e_1{}^2}\,A''' &= \alpha'' \sin B'' = \beta'' \sin C' \end{aligned}$$

---

[20]) Der Ausdruck „Knotenlinie" für die Durchschnittslinie der beiden Bahnebenen dürfte der Kürze halber gebraucht zu keinem Misverständnis führen.

[21]) Littrow hat offenbar die Ausdrücke mit β und C nach Analogie derer mit α und B gebildet, indem er die Grössen mit und ohne (unteren) Index vertauschte, dabei aber übersehen, dass dann A' und A'' in einander übergehen, ein Irrthum, der bei einer Anwendung der Formeln zur numerischen Berechnung sich geäussert haben würde.

$$
\begin{aligned}
2\,a_1{}^2 e_1 - 2aa_1 e\,A &= \beta\cos C \\
-2\,aa_1\sqrt{1-e_1{}^2}\,eA' &= \beta\sin C \\
2\,aa_1\sqrt{1-e_1{}^2}\,A' &= \beta'\sin C' \\
-2\,aa_1\sqrt{1-e_1{}^2}\,A'' &= \beta''\cos C''^{22})
\end{aligned}
$$

a, a_1, e, e_1 bezeichnen die halben Axen und die Excentricitäten der beiden Bahnen. Aus E und E_1 erhält man auf bekannte Weise die wahren Anomalieen v und v_1 und ohne weitere Schwierigkeiten lässt sich dann die Distanz $\triangle$ bestimmen. Es kommt nur auf die Auflösung der Gleichungen (a) nach E und E_1 an.

Die Einführung etwas anderer Hilfsgrössen an Stelle der A u. s. f., wenn mehrere Planeten mit ein und demselben zu combiniren waren, übergehe ich hier als nebensächlich.

Von diesem Versuch einer strengen Lösung nahm Littrow gänzlich Abstand, weil sich die praktische Durchführung bei diesem Verfahren äusserst complicirt gestalte. Nach einer vergeblichen Umschau nach anderen Wegen bin ich gleichwohl zu demselben Princip zurückgekehrt und habe im II. Theile ein zum Ziel führendes Verfahren angegeben, wobei sich Gelegenheit bieten wird, auf einzelne Punkte des vorstehenden zurückzukommen.

2. **Andere Methode von K. von Littrow.** Nachdem Littrow die genauen Formeln verlassen hatte, musste er sich begnügen, näherungsweise zum Ziel zu gelangen.[23]) Um zunächst solche Combinationen von Asteroidenbahnen herauszufinden, bei denen kleine Bahnnähen statthätten, bediente er sich anfangs eines aus Drähten hergestellten Modells der Bahncurven. Eine engere Auswahl wurde sodann durch Zeichnungen ermöglicht. Da jede wirkliche Bahnnähe im Gegensatz zu einer für irgend einen Beschauer scheinbaren dadurch gekennzeichnet ist, dass die Projectionen der kürzesten Entfernung auf drei zu einander senkrechte Ebenen kleiner (höchstens eine gleich) wie sie selbst

[22]) Der Factor 2 hätte füglich überall fortbleiben können.

[23]) A. a. O. s. Note 18, Denkschriften der k. Akad. der Wissensch., math.-naturw. Cl. XVI, Wien 1859. Physische Zusammenkünfte der Planeten (1)—(42) während der nächsten Jahre. Denkschr. XXXI, pg. 157. Physische Zusammenkünfte der Planeten (1)—(82) während der nächsten Jahre. Wien 1871.

sind, so würden drei Zeichnungen für jeden Planeten darüber entscheiden. L. begnügt sich mit 2 Projectionen jeder Bahn,[24]) einmal auf die Ekliptik und zweitens auf eine zu dieser senkrechten Ebene (beiläufig den durch 0° und 180° Länge gehenden Breitenkreis). Je zwei der beiden für jeden Planeten auf eine Bause übertragenen Zeichnungen wurden auf einander und auf einen Ekliptikalkreis gebracht und ergaben auf sehr einfache Weise, wenn sie in demselben Massstab entworfen und in gleicher Weise orientirt waren, die Länge der Ekliptik, für welche in beiden Projectionen die Bahnpunkte eine unter einer bestimmten Grenze liegende Entfernung hatten. Von diesen konnte dann angenommen werden, dass sie einer wirklichen Proximität entsprechen.[25])

Jetzt waren zwei Möglichkeiten vorhanden. Entweder wich die gefundene Länge L der Proximität unbedeutend von der Länge der Durchschnittslinie der beiden Bahnebenen ab oder nicht. Hierüber entschied eine kurze Rechnung. Sind nämlich i, i_1 die Neigungen, Ω, Ω_1 die Knotenlängen der beiden Bahnen und werden mit U und U_1 die der Schnittlinie in den beiden Bahnen zukommenden Argumente der Breite bezeichnet, so wendet Littrow unter Einführung einer Hilfsgrösse q durch

$$\operatorname{tg} q = \frac{-\operatorname{ctg} i_1}{\cos(\Omega_1 - \Omega)}$$ die Formeln

$$\operatorname{tg} U = \frac{\operatorname{tg}(\Omega_1 - \Omega) \cdot \cos q}{\cos(i - q)}$$

$$\operatorname{tg}(l - \Omega) = \operatorname{tg} U \cos i$$

an. Ergab sich hieraus $L - l$ klein, so nahm Littrow die Proximität in der Knotenlinie an, wie es die früheren Bearbeiter des Problems in jedem Falle thaten. Es wurde dann für die andere Bahn U_1 ebenso wie U berechnet, damit ergaben sich

---

[24]) Zweifel entstanden durch diese Beschränkung nur, wenn die Proximität in die Nähe des Aequinoctialbreitenkreises fiel. L. erhielt übrigens nur eine der Proximität benachbarte Distanz, da die kürzeste Entfernung der Projectionen nicht die Projection der kürzesten Entfernung ist.

[25]) In der von Littrow zur Erläuterung seines Verfahrens in Denkschr. XVI. gegebenen Darstellung einer solchen Zeichnung für Calliope—Psyche scheint bei der südlich von der Ekliptik gelegenen Proximität ein Versehen stattgefunden zu haben, wenn nicht die Wiedergabe der Zeichnung in verkleinertem Massstab zu einer Ungenauigkeit Veranlassung gegeben hat.

die wahren Anomalieen und die Radien-Vectoren in der Knotenlinie, deren Differenz $R - R_1$ als kürzeste Entfernung gelten konnte.

Im anderen Falle, wo die berechnete Länge l der Knotenlinie sehr von der durch die Zeichnungen gefundenen Länge der Proximität abwich, nahm L. zur Vereinfachung an, dass den beiden Endpunkten der kürzesten Distanz dieselbe (gefundene) Länge zukomme. Man fand dann ohne Schwierigkeit die Entfernung der beiden jetzt bekannten Punkte. Durch Variation von L ergaben sich verschiedene Werthe der Distanz, aus denen dann die kürzeste durch Interpolation gefunden werden konnte.

In den meisten Fällen begnügte sich Littrow damit, dort Proximitäten anzunehmen, wo die kürzesten Entfernungen der beiden Projectionen eine bestimmte Grenze nicht überschritten. Abgesehen von dieser Licenz liefert auch die stricte Anwendung des beschriebenen Verfahrens nicht die wahre Proximität, sondern nur eine in der Nähe liegende. Dabei sind die Bedenken ausser Acht gelassen, die jede graphische Methode einflössen muss.[26]) Gleichwohl hat sich Littrow ihrer ausschliesslich bedient; das Modell musste bei der wachsenden Zahl der Planeten fortfallen, die Zeichnungen wurden zweckmässiger als anfangs von geschickten Hilfskräften entworfen.[27]) Dass Littrow selbst nicht vollkommen befriedigt war,[28]) zeigen seine späteren Bemühungen durch Rechnung zum Ziele zu kommen, von denen er jedoch keine numerischen Anwendungen gemacht hat. Bevor wir zu dieser weiteren Methode übergehen, wollen wir uns mit dem Verfahren Linsser's beschäftigen, der an Stelle der Zeichnungen Tafeln setzte. Auch er hat

[26]) Littrow giebt als ungefähre Grenze des noch unterscheidbaren der in verhältnissmässig grossem Massstabe dargestellten Zeichnungen 0,01 an, eine Zahl, die hinreichen mochte, wenn eine Entfernung von 0,1 noch als Proximität zugelassen wurde. In der letzten Abhandlung (Denkschr. XXXI) hat L. diese Grenze der Distanz in der Proximität auf 0,05 herabgesetzt; die Längeneinheit wurde hier in den Zeichnungen durch 2 Wiener Zoll repräsentirt (= 5,3 cm).

[27]) Die Modelle wurden für 38 Planeten und periodische Cometen construirt. — Für veränderte Elemente würden die Zeichnungen eine neue Bearbeitung erfordern.

[28]) Vergl. Denkschr. XVI, pg. 50.

wirklichen Gebrauch von seinem Verfahren zur Berechnung von Proximitäten gemacht.

3. **Linsser's Methode.** Linsser[29]) vermied, wie erwähnt, die Ungenauigkeiten, die auf graphischem Wege entstehen, aber er ging ebenfalls von der nicht genau der Wahrheit entsprechenden Annahme aus, dass die Punkte kürzester Distanz in ein und demselben Breitenkreise liegen. Bedeuten Ω und i Knotenlänge und Neigung, a und e Halbaxe und Excentricität einer Bahn, sind ferner λ und β Länge und Breite eines ihrer Punkte auf die Ekliptik bezogen, r und v Radius-Vector und wahre Anomalie desselben, so ist

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} i \,.\, \sin(\lambda - \Omega)$$

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e\,\cos v}$$

Für das Argument λ wurde eine Tafel in einem Intervall von 5 zu 5° berechnet, welche die zugehörigen Werthe von

Arg. λ: r, $lg\ r$, β

lieferte. Durch Vergleichung von zwei solchen Tafeln fand man diejenige heliocentrische Länge λ', bei der die Differenz der Radien-Vectoren unter einer bestimmten Grenze lag (Linsser nahm wie Littrow 0,1 als diese Grenze an). War dies in der Nähe der (vorher zu berechnenden)[30]) Länge der

[29]) Linsser's Methode scheint nicht separat veröffentlicht worden zu sein; in der c. Arbeit von Littrow (Denkschr. XVI, pg. 77) werden seine Resultate mit den von ihm gewonnenen verglichen. Um einen Ueberblick über den Umfang der Rechnung zu erhalten, wurde der Gang derselben hier ausgeführt. Allerdings wäre dazu eine Wiedergabe der für eine Combination erforderlichen Tafeln nicht unwesentlich. — Karl Linsser, damals in Sonneberg bei Coburg, erfreute sich, wie Littrow anführt, bei seiner Arbeit der Unterstützung von D'Arrest, der, wie oben erwähnt, sich früher bereits mit dem vorliegenden Gegenstand beschäftigt hatte.

[30]) Sind K und K_1 die Längen in der Bahn für die Knotenlinie, so findet man diese unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen durch

$$K = U + \Omega \qquad K_1 = U_1 + \Omega_1$$

wo U und U_1 wie früher (pg. 9) berechnet werden können. Die Länge in der Ekliptik λ für die Knotenlinie folgt dann aus

$$\operatorname{tg}(\lambda - \Omega) = \operatorname{tg}(K - \Omega)\cos i$$

$$\operatorname{tg}(\lambda - \Omega_1) = \operatorname{tg}(K_1 - \Omega_1)\cos i_1$$

Die Radien in der Knotenlinie sind, wenn $V = U - \omega$, $V_1 = U_1 - \omega_1$, wo $\omega = \pi - \Omega$, $\omega_1 = \pi_1 - \Omega_1$

$$R = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 \pm e\,\cos V} \qquad R_1 = \frac{a_1\,(1 - e_1{}^2)}{1 \pm e_1\,\cos V_1}$$

Knotenlinie der Fall, so konnte die Differenz der Radien-Vectoren in der Schnittlinie

$$\triangle = R - R_1$$

als kürzeste Distanz gelten.

Andernfalls gab die letzte Columne der Tafeln die Differenz $\beta - \beta_1$ und da die kürzeste Distanz in dem zu der gesuchten Länge λ_0 gehörigen Breitenkreise vorausgesetzt wurde, so fand sich für λ':

$$\triangle^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\beta - \beta_1)$$

oder wenn kurz $r - r_1 = d$ gesetzt wird

$$\triangle^2 = d^2 + 4rr_1 . \sin^2 \tfrac{1}{2} (\beta - \beta_1)$$

Wurde nun 0,1 als obere Grenze für $\triangle$ angenommen, so fand sich der Maximalwerth für $\beta - \beta_1$, der für ein bestimmtes r und d noch eine Distanz von 0,1 zuliess, durch die Gleichung

$$\sin \tfrac{1}{2} (\beta - \beta_1) = \frac{1}{2r} \sqrt{0{,}01 - d^2}$$

wobei $\sqrt{rr_1}$ annähernd r gleichgesetzt ist. Diese Formel lag einer anderen Tafel zu Grunde, die den Radius-Vector r und die Differenz d als Eingänge besass. In weiteren Grenzen berechnet, konnte sie für alle Planeten benützt werden und lieferte also die Maximalwerthe von $\beta - \beta_1$. War nun der zu λ' gehörige Werth von $\beta - \beta_1$ kleiner als dieser Maximalwerth, so wurde er in die Formel für $\triangle$ substituirt und man erhielt $\triangle < 0{,}1$. Durch Berechnung in der Nähe liegender $\triangle$ und Interpolation des kleinsten gelangte man zur Proximität, allerdings unter der genannten Voraussetzung, dass die kürzeste Distanz ganz in demselben Breitenkreise liege.

4. **Letzte Methode von Littrow.** Auch Littrow selbst hat, wie bereits erwähnt, den Versuch gemacht, wenn nicht die Anwendung der Zeichnungen zu umgehen, so wenigstens die durch sie erlangte Kenntniss der ungefähren Lage der Proximität durch Rechnung zu vervollständigen. Sein Ideengang ist in Kürze folgender:[31])

Da die kürzeste Distanz auf beiden Bahnlinien senkrecht stehen muss, so liegt sie offenbar in den Normalebenen, die in den Punkten der Proximität auf jenen errichtet werden. Con-

[31]) Denkschriften XVI, pg. 50.

struirt man daher in der Gegend der beiläufig bekannten Bahnnähe verschiedene Normalebenen auf der einen Ellipse, so stehen die in ihnen liegenden Distanzen von den Schnittpunkten mit der anderen Bahn bereits auf jener ersten senkrecht. Durch Variation des Ortes in der ersten Bahn erhält man verschiedene solche Distanzen, aus denen man wieder durch ein interpolirendes Verfahren auf die kleinste schliesst.

So einfach dieser Weg dem Gedanken nach erscheint, so wird er doch in praxi für häufigere Anwendungen zu langwierig. Um einen Ueberblick zu erlangen, möge die wirkliche Ausführung in ihren wesentlichen Zügen hier folgen.

Ist L die näherungsweise bekannte Länge der Proximität, Ω die des aufsteigenden Knoten, i die Neigung der Bahn, so ergiebt die Gleichung

$$\operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{tg}(L - \Omega)}{\cos i}$$

das Argument der Breite u für den der Länge L entsprechenden Ort in der Bahn und damit die wahre Anomalie

$$v = u - \omega$$

und den Radius-Vector $r = \frac{p}{1 + e \cos v}$ wo p der halbe Parameter ist.

Die Tangente der Ellipse im betrachteten Punkte hat dann unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Coordinatensystems mit der Ekliptik als x-y-Ebene und der Aequinoctionallinie als x-Axe folgende Richtungscosinus[32])

$$\cos(TX) = -\frac{k \sin \alpha}{c \sqrt{p}} \sin(v + \omega + A) + \lambda$$

---

[32]) Um diese Formeln zu erhalten, kann man von den Gleichungen für den Richtungswinkel δ der Tangente gegen den Radius-Vector ausgehen, indem man also die Bahnebene als x-y-Ebene und den Radius-Vector als x-Axe betrachtet. Die cos der Winkel mit den Coordinatenaxen sind dann:

$$\cos \delta = -\frac{k}{c} \cdot \frac{e \sin v}{\sqrt{p}}, \qquad \sin \delta = -\frac{k}{c} \frac{1 + e \cos v}{\sqrt{p}}, \qquad 0.$$

Nimmt man dann eine Drehung um die z-Axe um den Winkel $-(v + \omega)$ vor, so fällt die x-Axe in die Knotenlinie. Hält man diese dann fest und dreht um i und endlich noch einmal um $-\Omega$ bei festgehaltener z-Axe, so gelangt man zu den im Texte angeführten Gleichungen.

$$\cos(TY) = -\frac{k \sin\beta}{c\sqrt{p}} \sin(v + \omega + B) + \mu$$

$$\cos(TZ) = +\frac{k \sin i}{c\sqrt{p}} \cos(v + \omega) + \nu$$

wo k die Constante des Sonnensystems und $c = k\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}$ bekannt ist und zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\sin\alpha \cos A = \cos\Omega \qquad -\frac{ke \sin\alpha \sin(\omega + A)}{c\sqrt{p}} = \lambda$$

$$\sin\alpha \sin A = \sin\Omega \cos i \qquad -\frac{ke \sin\beta \sin(\omega + B)}{c\sqrt{p}} = \mu$$

$$\sin\beta \cos B = \sin\Omega \qquad +\frac{ke \sin i \cos\omega}{c\sqrt{p}} = \nu$$

$$\sin\beta \sin B = -\cos\Omega \cos i$$

Sind jetzt x', y', z' laufende Punktcoordinaten, so ist die Gleichung der Normalebene im betrachteten Punkte:

$$x' \cos(TX) + y' \cos(TY) + z' \cos(TZ) = P$$

Hier bestimmt sich $P = \frac{ker \sin v}{c\sqrt{p}}$.[33]) Den Durchschnittspunkt der Normalebene mit der anderen Bahn findet man nun nicht direkt. Man berechnet vielmehr auch in der zweiten Bahn für die Länge L und einen etwas geänderten Werth derselben den Radius-Vector r_1 und die wahre Anomalie v_1, sodann gewisse Constanten[34]) α_1, β_1, A_1, B_1. Hieraus erhält man die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte

$$x_1 = r_1 \sin\alpha_1 \sin(u_1 + A_1)$$
$$y_1 = r_1 \sin\beta_1 \sin(u_1 + B_1)$$
$$z_1 = r_1 \sin u_1 \sin i_1$$

Bildet man jetzt

$$x_1 \cos(TX) + y_1 \cos(TY) + z_1 \cos(TZ) - P,$$

so müsste man 0 erhalten, wenn $(x_1\ y_1\ z_1)$ der Schnittpunkt

[33]) Wegen $\cos(TX) = \frac{dx}{cdt}$, u. s. w. findet sich

$$P = \frac{xdx + ydy + zdz}{cdt} = \frac{rdr}{cdt}. \quad \text{Hier ist } \frac{dr}{dt} = \frac{ke \sin v}{\sqrt{p}}$$

einzusetzen.

[34]) Die hier eingeführten Constanten unterscheiden sich von den α, β, A, B nur dadurch, dass die Grössen mit und ohne Index vertauscht und bei $\sin\alpha_1 \sin A_1$ und $\sin\beta_1 \sin B_1$ entgegengesetzte Vorzeichen zu nehmen sind.

der vorhin construirten Normalebene wäre. Aus den übrig bleibenden Fehlern bei den beiden über L gemachten Hypothesen wird man auf den Werth von L schliessen können, für den dieser Ausdruck verschwindet.

Ich übergehe die Berechnung der Distanz D der beiden so gefundenen Punkte, die im wesentlichen ebenso bei allen Methoden wiederkehrt. Es ist dann noch nöthig, zwei nahe liegende Distanzen D' und D'' in ähnlicher Weise für die Längen L' und L'' zu rechnen, um dann aus

$$D = \triangle + f(L - \Lambda)^2$$
$$D' = \triangle + f(L' - \Lambda)^2$$
$$D'' = \triangle + f(L'' - \Lambda)^2$$

die 3 Unbekannten f, die Länge Λ und die Grösse $\triangle$ der Distanz in der Proximität zu berechnen.

Die Vorzüge dieser Methode liegen in der Umgehung der graphischen Hilfsmittel und der direkten Erreichung des Zieles. So lange jedoch die ganze Berechnung, insbesondere die Auffindung der Schnittpunkte der Normalebene mit der anderen Bahn nicht auf einfachere Weise gelingt, wird eine praktische Ausführung sehr umständlich bleiben.[35]) — Eine nur auf Rechnung beruhende Lösung der Aufgabe soll nun im folgenden entwickelt werden.

II.

1. Die Aufgabe, die kürzeste Entfernung zweier beliebigen Raumcurven zu finden, gehört in das Gebiet der Variationsrechnung und ist allgemein gelöst. In dem vorliegenden Falle der kürzesten Entfernung zweier Planetenbahnen ist es nicht nöthig, auf jene allgemeine Herleitung zurückzugreifen.

Wie später gezeigt werden soll, lässt sich nämlich die Entfernung $\triangle$ zweier beliebigen Punkte der Bahnen als Function zweier Veränderlichen darstellen, deren jede nur auf einen der beiden Planeten sich bezieht. Nennen wir diese

[35]) Trotz mehrfacher Versuche ist es mir nicht gelungen, im Verfolge des Gedankenganges dieser der Theorie nach ebenso anziehenden als einfachen Methode die der praktischen Durchführung entgegenstehenden Schwierigkeiten zu beseitigen.

ξ und ξ_1, so besteht die Bedingung dafür, dass $\triangle$ ein Minimum wird, in dem Verschwinden der ersten Differentialquotienten nach den beiden unabhängigen Variabeln:

$$\frac{d\triangle}{d\xi} = 0 \qquad \frac{d\triangle}{d\xi_1} = 0$$

Führt man ein rechtwinkliges Coordinatensystem ein, so dass

$$\triangle^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2$$

wird, wenn $(x_0\ y_0\ z_0)$ und $(x_1\ y_1\ z_1)$ die Coordinaten der Endpunkte sind, dann kann man $x\ y\ z$ als neue Variable ansehen, die von ξ und ξ_1 abhängen und hat:

$$\frac{\partial\triangle}{\partial x}\cdot\frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial\triangle}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\xi} + \frac{\partial\triangle}{\partial z}\cdot\frac{dz}{d\xi} = 0$$

$$\frac{\partial\triangle}{\partial x}\cdot\frac{dx}{d\xi_1} + \frac{\partial\triangle}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\xi_1} + \frac{\partial\triangle}{\partial z}\cdot\frac{dz}{d\xi_1} = 0$$

als die neuen Bedingungsgleichungen des Minimi. Nun sind $\frac{\partial\triangle}{\partial x}$ u. s. w. den $\cos(\triangle, x)$ u. s. w. gleich. Anstatt von ξ und ξ_1, welche den Ort der Endpunkte in den beiden Ellipsen bestimmen, kann man x, y, z als abhängig von den von irgend einem Punkte gezählten Ellipsenbogen s und s_1 ansehen[36]) und hat dann

$$\cos(\triangle,x)\cdot\frac{dx}{ds} + \cos(\triangle,y)\,\frac{dy}{ds} + \cos(\triangle,z)\,\frac{dz}{ds} = 0$$

$$\cos(\triangle,x)\cdot\frac{dx}{ds_1} + \cos(\triangle,y)\,\frac{dy}{ds_1} + \cos(\triangle,z)\,\frac{dz}{ds_1} = 0$$

Diese Gleichungen bedeuten nichts anderes, als dass die kürzeste Entfernung senkrecht steht zu den Tangenten in ihren beiden Endpunkten.

2. **Bestimmung des Ortes der Proximität.** Die wichtigste Frage, die sich zunächst darbot, betrifft die Wahl der Veränderlichen, von denen die Entfernung abhängt. Es kamen als solche, wenn man von der Zeit ganz absieht, d. h. das

[36]) Als Variable ξ und ξ_1 werden im folgenden die excentrischen Anomalieen gewählt werden. Von der excentrischen Anomalie hängt aber bekanntlich das elliptische Integral, welches den Bogen darstellt,

$$a\int_0^{\xi} d\xi\,\sqrt{1 - e^2\sin^2\xi}$$

allein ab; e ist die Excentricität.

Problem rein geometrisch betrachtet, insbesondere die wahre und die excentrische Anomalie, sowie der Radius-Vector in Betracht. Ausserdem könnte man etwa noch an den Richtungswinkel der Tangente gegen den Radius und an rechtwinklige Coordinaten denken. Das erstere giebt deshalb complicirte Resultate, weil sich zwischen den in dem Ausdruck für $\triangle$ auftretenden Grössen (dem Radius-Vector und der wahren Anomalie) und dem Richtungswinkel keine einfachen Beziehungen ergeben; den zweiten Weg schlug Gruneert ein, der, wie oben (pg. 5) erwähnt, zu keinen für die wirkliche Berechnung brauchbaren Resultaten gelangte.

Unter den drei zuerst genannten Grössen hat Littrow in den von ihm aufgestellten Ausdrücken für eine strenge Lösung des Problems[37]) mit gutem Glück die excentrische Anomalie ausgewählt. Bei der Wahl dieser Variabeln, durch welche sich die Formeln bei weitem am einfachsten gestalten, liegt die Nothwendigkeit einer getrennten Behandlung elliptischer und parabolischer Bahnen vor. Dies ist der wesentliche Grund der Beschränkung der vorliegenden Untersuchung auf jene, die damit gleichzeitig die periodischen Cometen als die für die Frage der Proximitäten allein interessanten umfasst.

Um die Gleichungen in derjenigen Folge an einander zu reihen, in welcher sie bei der Berechnung in Anwendung kommen, soll zunächst die Lage der Schnittlinie der beiden Bahnen durch die Winkel U und U_1 mit den Knotenlinien und die gegenseitige Neigung J bestimmt werden.

Sind Ω, Ω_1 die Knotenlängen und i und i_1 die Neigungen der beiden Bahnen gegen die Ekliptik, so bestehen die vier Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} \sin\frac{J}{2}\cdot\sin\frac{U+U_1}{2} = \sin\frac{\Omega_1-\Omega}{2}\cdot\sin\frac{i_1+i}{2} \\ \sin\frac{J}{2}\cdot\cos\frac{U+U_1}{2} = \cos\frac{\Omega_1-\Omega}{2}\cdot\sin\frac{i_1-i}{2} \\ \cos\frac{J}{2}\cdot\sin\frac{U-U_1}{2} = \sin\frac{\Omega_1-\Omega}{2}\cdot\cos\frac{i_1+i}{2} \\ \cos\frac{J}{2}\cdot\cos\frac{U-U_1}{2} = \cos\frac{\Omega_1-\Omega}{2}\cdot\cos\frac{i_1-i}{2} \end{cases}$$

[37]) Sitzungsber. der Wiener Akademie XII. — s. pg. 6. (I, 1).

Nun ist das Quadrat der Entfernung zweier Punkte der beiden Bahnen, wenn ihre Radien-Vectoren r, r_1 und die wahren Anomalieen v, v_1, die der Schnittlinie V, V_1 sind

$$\triangle^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\psi,$$

wo

$$\cos\psi = \cos(v - V)\cos(v_1 - V_1) + \sin(v - V)\sin(v_1 - V_1) \cdot \cos J$$

und

$$(2) \quad \begin{cases} V = U - \omega \\ V_1 = U_1 - \omega_1 \end{cases}$$

ist, indem ω und ω_1 die üblichen Bezeichnungen für die Winkel zwischen den Knoten- und Apsidenlinien sind. Durch Einsetzen erhält man

$$\begin{aligned} \triangle^2 = r^2 + r_1^2 &- 2rr_1(\cos V \cos V_1 + \sin V \sin V_1 \cos J)\cos v \cdot \cos v_1 \\ &- 2rr_1(\cos V \sin V_1 - \sin V \cos V_1 \cos J)\cos v \cdot \sin v_1 \\ &- 2rr_1(\cos V_1 \sin V - \sin V_1 \cos V \cos J)\cos v_1 \cdot \sin v \\ &- 2rr_1(\sin V \sin V_1 + \cos V \cos V_1 \cos J)\sin v \cdot \sin v_1 \end{aligned}$$

Hierbei erkennt man leicht, dass der erste Klammerausdruck den cos des Winkels ε zwischen den beiden Apsiden bedeutet. Die anderen sind dann die cos der drei anderen Seiten eines sphärischen Vierecks mit Quadrantendiagonalen, die den Winkel J einschliessen, wenn ε eine derselben ist; und zwar liegen ε und η, ζ und ϑ einander gegenüber, wenn wir diese setzen:

$$(3) \quad \begin{cases} \cos\varepsilon = \cos V \cos V_1 + \sin V \sin V_1 \cos J \\ \cos\zeta = \cos V \sin V_1 - \sin V \cos V_1 \cos J \\ \cos\vartheta = \cos V_1 \sin V - \sin V_1 \cos V \cos J \\ \cos\eta = \sin V \sin V_1 + \cos V \cos V_1 \cos J \end{cases}$$

Ersetzen wir jetzt die r, r_1 und v, v_1 unter Berücksichtigung der Relationen

$$\begin{aligned} r &= a(1 - \sin\varphi \cos E) \\ r_1 &= a_1(1 - \sin\varphi_1 \cos E_1) \\ r \sin v &= a \cos\varphi \sin E \\ r_1 \sin v_1 &= a_1 \cos\varphi_1 \sin E_1 \\ r \cos v &= a(\cos E - \sin\varphi) \\ r_1 \cos v_1 &= a_1(\cos E_1 - \sin\varphi_1) \end{aligned}$$

durch die excentrischen Anomalieen (φ, φ_1 bedeuten die Excentricitätswinkel, a, a_1 die halben Axen), so wird

$$\begin{aligned} \triangle^2 = a^2(1 - \sin\varphi \cos E)^2 &+ a_1^2(1 - \sin\varphi_1 \cos E_1)^2 \\ &- 2aa_1 \cos\varepsilon(\cos E - \sin\varphi)(\cos E_1 - \sin\varphi_1) \\ &- 2aa_1 \cos\zeta(\cos E - \sin\varphi) \cdot \cos\varphi_1 \cdot \sin E_1 \end{aligned}$$

$$- 2aa_1 \cos\vartheta\ (\cos E_1 - \sin\varphi_1)\ .\ \cos\varphi\ .\ \sin E$$
$$- 2aa_1 \cos\eta\ .\ \cos\varphi\ .\ \cos\varphi_1\ .\ \sin E\ .\ \sin E_1$$

Hier treten nur noch E und E_1 als Variable auf. Die nach ihnen genommenen Differentialquotienten liefern gleich Null gesetzt die der kürzesten Distanz entsprechenden Werthe E^0 und $E_1{}^0$. Durch Differentiation nach E ergiebt sich:

$$\begin{aligned} &2a^2\ (1 - \sin\varphi\ \cos E)\ .\ \sin\varphi\ .\ \sin E \\ &+ 2aa_1 \Big\{ \cos\varepsilon\ (\cos E_1 - \sin\varphi_1)\ \sin E \\ (\alpha)\qquad &\quad + \cos\zeta\ \cos\varphi_1\ \sin E_1\ \sin E \\ &\quad - \cos\vartheta\ \cos\varphi\ (\cos E_1 - \sin\varphi_1)\ \cos E \\ &\quad - \cos\eta\ .\ \cos\varphi\ .\ \cos\varphi_1\ .\ \sin E_1\ .\ \cos E \Big\} = 0 \end{aligned}$$

Ganz analog erhält man durch Differentiation nach E_1 eine zweite Gleichung, in der die mit und ohne Index versehenen Grössen vertauscht sind, also auch $\cos\vartheta$ und $\cos\zeta$ in einander übergehen, dagegen $\cos\varepsilon$ und $\cos\eta$ unverändert bleiben:

$$\begin{aligned} &2a_1{}^2\ (1 - \sin\varphi_1\ \cos E_1)\ \sin\varphi_1\ \sin E_1 \\ &+ 2aa_1 \Big\{ \cos\varepsilon\ (\cos E - \sin\varphi)\ \sin E_1 \\ (\beta)\qquad &\quad + \cos\vartheta\ \cos\varphi\ \sin E_1\ \sin E \\ &\quad - \cos\zeta\ \cos\varphi_1\ (\cos E - \sin\varphi)\ \cos E_1 \\ &\quad - \cos\eta\ \cos\varphi\ \cos\varphi_1\ \sin E\ \cos E_1 \Big\} = 0 \end{aligned}$$

Eine direkte Bestimmung von E und E_1 aus diesen beiden Gleichungen (α) und (β) bleibt ausgeschlossen. In Folge dessen ist eine successive Auflösung nöthig. Eine solche wäre in doppelter Weise möglich, entweder kann man die erste Gleichung (α) nach E_1 auflösen und den erhaltenen Werth in die zweite einsetzen, die dann den ursprünglichen Werth von E liefern muss, wenn man sich in der Proximität befindet (dies wird man durch allmähliche Annäherung erreichen können) oder umgekehrt erst E, dann E_1 berechnen. In geometrische Form gekleidet würde sich dies so aussprechen lassen:

1. Entweder errichtet man in einem Punkte E der ersten Bahn eine Normalebene und erhält den Schnittpunkt E_1 derselben mit der anderen Bahn; hier errichtet man wiederum die Normalebene, dann muss im Falle der Proximität ihr Schnittpunkt E' mit der ersten Bahn mit E zusammenfallen, oder aber

2. Man legt durch einen Punkt E in I die Normalebene an die Bahn II, die hier in E_1 schneidet, von E_1 fällt man

wiederum eine Normale auf I, die in E' ihren Fusspunkt haben möge (d. h. eine Gerade, die auf der Tangente in E' senkrecht steht). Für die Bahnnähe fallen E und E' zusammen.

Die erste dieser Auflösungen ist ohne weiteres ausführbar. Führt man zunächst durch folgende Gleichungen 12 Constante ein:

$$\begin{array}{l|l}
+\cos\vartheta\cos\varphi\sin\varphi_1 = \alpha\sin A & +\cos\zeta\cos\varphi_1\sin\varphi = \alpha'\sin A' \\
-\frac{a}{a_1}\sin\varphi+\cos\varepsilon\sin\varphi_1 = \alpha\cos A & -\frac{a_1}{a}\sin\varphi_1+\cos\varepsilon\sin\varphi = \alpha'\cos A' \\
+\cos\vartheta\,.\,\cos\varphi = \beta\sin B & +\cos\zeta\,.\,\cos\varphi_1 = \beta'\sin B' \\
+\cos\varepsilon = \beta\cos B & +\cos\varepsilon = \beta'\cos B' \\
-\cos\eta\cos\varphi\cos\varphi_1 = \gamma\sin\Gamma & -\cos\eta\cos\varphi_1\cos\varphi = \gamma'\sin\Gamma' \\
-\cos\zeta\,.\,\cos\varphi_1 = \gamma\cos\Gamma & -\cos\vartheta\,.\,\cos\varphi = \gamma'\cos\Gamma'
\end{array}$$

wobei also

$$\beta\cos B = \beta'\cos B' \qquad \gamma\sin\Gamma = \gamma'\sin\Gamma'$$

ist, und bedient man sich noch folgender Hilfsgrössen, welche die jedesmal bekannte der beiden Grössen E und E_1 enthalten:

$$\begin{array}{ll}
\beta\sin(B+E) = \lambda\sin A & \beta'\sin(B'+E_1) = \lambda'\sin A' \\
\gamma\sin(\Gamma+E) = \lambda\cos A & \gamma'\sin(\Gamma'+E_1) = \lambda'\cos A'
\end{array}$$

so erhält man die beiden Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l}
\lambda\sin(E_1+A) = \frac{a}{2a_1}\sin^2\varphi\,\sin 2E + \alpha\sin(E+A) \\
\lambda'\sin(E+A') = \frac{a_1}{2a}\sin^2\varphi_1\,\sin 2E_1 + \alpha'\sin(E_1+A')
\end{array}\right.$$

Aus der ersten Gleichung findet man sofort E_1 für ein gegebenes E, für dieses aus der zweiten einen Werth E' für E. Durch ein Näherungsverfahren würde man schliesslich einen Werth E erhalten, dem E' gleich wäre.

Bei der zweiten Art der Auflösung gelingt es nicht, die Unbekannte auf eine Seite allein zu bringen, doch kann man sich, wie wir sehen werden, mit der Einsetzung eines Näherungswerthes begnügen. Dieser andere Weg ist wegen der grösseren Einfachheit der Hilfsgrössen entschieden vorzuziehen.

Wenn wir die ursprünglich aufgestellten Gleichungen (α) und (β) (auf pag. 19) wiederum mit $2aa_1$ dividiren, so erhalten wir

$$0 = \frac{a}{a_1}(1 - \sin\varphi \cos E)\sin\varphi \sin E$$
$$+ \left[\cos\varepsilon(\cos E_1 - \sin\varphi_1) + \cos\zeta \cos\varphi_1 \sin E_1\right]\sin E$$
$$- \left[\cos\vartheta(\cos E_1 - \sin\varphi_1) + \cos\eta \cos\varphi_1 \sin E_1\right]\cos\varphi \cos E$$

und eine analoge Gleichung [aus (β)].

Das erste Glied unterscheidet sich von

$$\frac{a}{a_1}\sin\varphi \,.\, \sin E \text{ nur um } \frac{a}{2a_1}\sin^2\varphi \,.\, \sin 2E,$$

einen Ausdruck, der selbst für grosse Excentricitäten klein genug ist,[38]) um für E einen Näherungswerth setzen zu können, so dass eine Wiederholung der Rechnung mit einem verbesserten Werthe nur ausnahmsweise nöthig ist.

Bedient man sich folgender abkürzender Bezeichnungen:

$$(4)\quad \begin{cases} \cos\zeta = \alpha \sin A & \cos\varepsilon = \beta \sin B \\ \cos\varphi \,.\, \cos\eta = \alpha \cos A & \cos\varphi \,.\, \cos\vartheta = \beta \cos B \\ \text{und der analogen} & \\ \cos\vartheta = \alpha_1 \sin A_1 & \cos\varepsilon = \beta_1 \sin B_1 \\ \cos\varphi_1 \,.\, \cos\eta = \alpha_1 \cos A_1 & \cos\varphi_1 \cos\zeta = \beta_1 \cos B_1 \end{cases}$$

so hat man mit Berücksichtigung von

$$a(1 - \sin\varphi \,.\, \cos E) = r$$
$$a_1(1 - \sin\varphi_1 \,.\, \cos E_1) = r_1$$

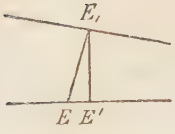
die beiden Gleichungen

$$(5)\quad \begin{cases} \operatorname{tg} E_1 = \cos\varphi_1 \cdot \dfrac{\alpha \sin(E + A) - \cos\zeta \,.\, \sin\varphi}{\beta \sin(E + B) - \cos\varepsilon \,.\, \sin\varphi + \dfrac{r_1 \sin\varphi_1}{a}} \\ \operatorname{tg} E = \cos\varphi \cdot \dfrac{\alpha_1 \sin(E_1 + A_1) - \cos\vartheta \,.\, \sin\varphi_1}{\beta_1 \sin(E_1 + B_1) - \cos\varepsilon \,.\, \sin\varphi_1 + \dfrac{r \sin\varphi}{a_1}} \end{cases}$$

Das Verfahren der Auflösung ist nun einfach folgendes: Für r_1 wird ein Näherungswerth eingesetzt und E_1 für ein (womöglich in der Nähe der Proximität liegendes) E berechnet; E_1 wird in die zweite Gleichung eingesetzt und ein Werth E' für E gefunden. Dann liegt, wie die Anschauung zeigt, E' der

---

[38]) Nimmt man $a = a_1$ an, so wird diese Grösse in maximo 0,0732 für (132) Aethra, welche die grösste Excentricität zu besitzen scheint. φ beträgt etwa 22°,5, eine bei der Unsicherheit der Bahn dieses Planeten noch nicht verbürgte Zahl.



Proximität näher als E. Denn das von E (wenn dieser Buchstabe zugleich den Punkt bezeichnet) auf die andere Bahncurve gefällte Perpendikel EE_1 ist als Hypotenuse grösser als E_1E', insofern man den kleinen Bogen EE' als geradlinig betrachten darf. Eine raschere Annäherung wird man jedoch erzielen, wenn man für mehrere um etwas auseinanderliegende Werthe von E die zugehörigen E' berechnet und daraus den Ort interpolirt, für den E und E' zusammenfallen.

Ohne die durch fortlaufende Numerirung (1--5). wie ich glaube, genügend hervorgehobenen Gleichungen nochmals zu wiederholen, möge doch einiges die Rechnung betreffendes hier zur Sprache kommen. Im allgemeinen lässt sich wohl sagen, dass eine wesentliche Abkürzung füglich nicht zu erwarten ist; einen verhältnissmässig nicht geringen Theil der Rechnung bildet allerdings die Aufsuchung der gegenseitigen Neigung der Bahnen, die Lage ihrer Schnittlinie und der Radien-Vectoren in dieser; doch wird man erstere bei jeder Art der Berechnung in Betracht ziehen müssen, wobei sich dann fast gleichzeitig die zweite ergiebt. Zudem haben beide nicht den Charakter von blossen Hilfsgrössen, sondern nehmen ein eigenes Interesse in Anspruch und bedingen wesentlich eine bessere Uebersicht und Beurtheilung der gewonnenen Resultate.

Denkt man sich die beiden Bahnebenen bis an die scheinbare Himmelskugel erweitert, so werden sich die beiden entstehenden grössten Kugelkreise in zwei Punkten schneiden, von denen einer nördlich, der andere südlich von der Ekliptik liegt (oder beide gleichzeitig in der Ekliptik). Rechnet man U und U_1, die man aus den Gleichungen (1) (pag. 17) findet, von den aufsteigenden Knoten im Sinne der täglichen Bewegung, so erhält man für $\Omega_1 - \Omega < 180^0$ den nördlichen, für $\Omega_1 - \Omega > 180^0$ den südlichen Schnittpunkt. Will man daher im zweiten Falle die U, U_1 und V, V_1 erhalten, welche auf den nördlich von der Ekliptik gelegenen Theil der Schnittlinie beider Bahnen sich beziehen, so muss man die erhaltenen Winkel um 180^0 verändern. Ausser der bekannten Prüfung

der Gauss'schen Gleichungen kommen noch einige Regeln zur Controle der Rechnung in Betracht:[39])

(1) Für negatives $i_1 - i$ ist

$$540^0 > U + U_1 > 180^0$$

für positives $i_1 - i$ liegt $U + U_1$ ausserhalb dieses Intervalles.

(2) $\frac{1}{2}(U + U_1)$ und $\frac{1}{2}(U - U_1)$ sind mit $\frac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega)$ gleichzeitig grösser oder kleiner als 90^0. Eine Ausnahme macht nur $\frac{1}{2}(U + U_1)$, im Falle $i_1 - i$ negativ ist.

(3) $i_1 + i > J > i_1 - i$.[40])

Hat man aus den Gleichungen (2) (pag. 18) V und V_1 gefunden, so berechnet man die Radien in der Schnittlinie durch

$$p = a \cos^2\varphi \qquad p_1 = a_1 \cos^2\varphi_1$$

$$R = \frac{p}{1 + e \cos V} \qquad R_1 = \frac{p_1}{1 + e_1 \cos V_1}$$

Eine sehr kurze Prüfung für diese kleine Rechnung gründet sich auf die bekannte Relation

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} = \frac{2}{p}$$

Die in den Gleichungen (3) (pag. 18) angegebene Berechnungsweise der Constanten $\varepsilon, \zeta, \eta, \vartheta$ dürfte die bequemste und kürzeste sein, auch hier ist eine besonders bei Anwendung der Gauss'schen Logarithmen leichte Controle empfehlenswerth, die auf der Gleichung

$$\operatorname{tg}(V - V_1) = \frac{\cos\vartheta - \cos\zeta}{\cos\varepsilon + \cos\eta}$$

beruht.

Die Rechnung der Gleichungen (4) (pag. 21) wird einestheils dadurch controlirt, dass

$$\begin{aligned} A \text{ nahezu} &= V_1 - V \\ B \quad = \quad & 90 + V_1 - V \\ A_1 \quad = \quad & V - V_1 \\ B_1 \quad = \quad & 90 + V - V_1 \end{aligned}$$

sein muss, was streng nur für $\cos\varphi = 1$ und $\cos\varphi_1 = 1$ stattfindet, und sodann durch die Relation

$$\alpha^2 . \beta^2 . \cos^2\varphi_1 . \sin 2A . \sin 2B = \alpha_1^2 . \beta_1^2 . \cos^2\varphi . \sin 2A_1 . \sin 2B_1$$

---

[39]) $\Omega_1 - \Omega$ wird von 0 bis 360^0 durchgezählt, $i_1 - i$ dagegen ist positiv oder negativ $< 180^0$ zu nehmen, wenn die folgenden Regeln in Bezug auf die Quadranten Geltung haben sollen.

[40]) $\frac{1}{2}(U - U_1)$ stimmt auch der Grösse nach mit $\frac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega)$ nahe überein. Bei $i_1 - i$ ist der absolute Werth zu verstehen.

Im Verlaufe der Rechnung nach den Endgleichungen (5) (pag. 21) kann man sodann noch darauf achten, dass E_1 nahe $= E + A$ und ebenso E nahe $= E_1 + A_1$ wird.

Hierbei sind specielle Fälle, die hin und wieder die Rechnung erleichtern können, nicht in Betracht gezogen. Nur der eine sei erwähnt, wo die Neigung der Bahnen gegen einander (für die angewandte Zahl der Decimalstellen) verschwindet. Dann ist

$$\cos\varepsilon = \cos\eta = \cos(V - V_1)$$
$$-\cos\zeta = \cos\vartheta = \sin(V - V_1)$$

und mithin

$$\operatorname{tg} E_1 = \cos\varphi_1 \cdot \frac{\alpha \cdot \sin(E + A) + \sin\varphi \cdot \sin(V - V_1)}{\beta \cdot \sin(E + B) - \cos(V - V_1) \cdot \sin\varphi + \frac{r_1}{a} \cdot \sin\varphi_1}$$

$$\operatorname{tg} E = \cos\varphi \cdot \frac{\alpha_1 \sin(E_1 + A_1) - \sin\varphi_1 \cdot \sin(V - V_1)}{\beta_1 \sin(E_1 + B_1) - \cos(V - V_1) \cdot \sin\varphi_1 + \frac{r}{a_1} \cdot \sin\varphi}$$

Da sich die Proximität häufig in der Nähe der Knotenlinie befindet, erwies es sich in der Regel vortheilhaft, von dieser auszugehen. Aus den oben für diese berechneten V und V_1 (pag. 18, Gleichungen (2)) ergaben sich die zugehörigen excentrischen Anomalieen durch die bekannten Formeln

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E_1 = \sqrt{\frac{1-e_1}{1+e_1}} \cdot \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v_1$$

in welchen, weil $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ besonders gebraucht werden, bei Anwendung Gauss'scher Logarithmen mit Vortheil

$$\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi} \qquad \sqrt{\frac{1-e_1}{1+e_1}} = \frac{\cos\varphi_1}{1+\sin\varphi_1}$$

geschrieben wird. Es wurden nun noch für zwei Werthe von E, die um 5° nach beiden Seiten von der Knotenlinie ablagen, nach (5) (auf pag. 21) die zugehörigen E_1 und zu diesen die E' berechnet.[41]) Aus den Differenzen $E' - E$, die sich er-

[41]) Bei Planeten wie Fides und Maja, deren Proximität weit von der Knotenlinie abliegt, war es nöthig, für viel grössere Intervalle (10 oder 20°) von E die Differenzen $E' - E$ zu berechnen.

gaben,[42]) wurde dasjenige E und E_1, für welches $E' - E$ verschwand, interpolirt, d. h. der wahre Ort der Proximität.

Bezeichnet man die in den Nennern von (5) auftretenden Ausdrücke kurz mit

$$S = - \cos\varepsilon \,.\, \sin\varphi + \frac{R_1}{a} \,.\, \sin\varphi_1$$

$$S_1 = - \cos\varepsilon \,.\, \sin\varphi_1 + \frac{R}{a_1} \,.\, \sin\varphi$$

worin R_1 und R die Radien in der Knotenlinie[43]) an Stelle der noch unbekannten r_1 und r gesetzt werden konnten, so war eine mehrmalige Berechnung dieser Grössen selten nöthig; man erhält nämlich mit meist hinreichender Genauigkeit die Aenderungen von S und S_1 durch die Differentialformeln

$$dS = \frac{a_1}{a} \,.\, \sin^2\varphi_1 \,.\, \sin E_1 \,.\, dE_1$$

$$dS_1 = \frac{a}{a_1} \,.\, \sin^2\varphi \,.\, \sin E \,.\, dE$$

Für $dE = dE_1 = 300'$ wird hierin der Factor von $\frac{a_1}{a} \sin^2\varphi_1 \,.\, \sin E_1$ resp. $\frac{a}{a_1} \sin^2\varphi \,.\, \sin E$

$$\left[8{,}94085\right]$$

Befindet man sich bereits in grosser Nähe der Proximität, so kann man für eine kleine Aenderung von E die von E_1 zwar nicht direct auf leichtere Weise berechnen, aber man erhält die Aenderungen des Zählers und Nenners von $\mathrm{tg}\, E$ gesondert[44])

$$dZ = \alpha_1 \,.\, \cos(E_1 + A_1) \,.\, dE_1$$
$$dN = \beta_1 \,.\, \cos(E_1 + B_1) \,.\, dE_1$$

---

[42]) Die schnellere oder langsamere Abnahme der Differenz $E' - E$ entscheidet zugleich darüber, ob die Bahnen eine kürzere oder längere Strecke einander nahe bleiben. Im letzteren Falle wird man bei wenig verschiedener mittlerer Bewegung auf eine lange Dauer der Proximität schliessen können.

[43]) R und R_1 sind aus den wahren Anomalieen V und V_1 pg. 23 bereits berechnet; zum Vergleich können sie noch aus den excentrischen Anomalieen durch die Relationen $R_1 = a_1 (1 - e_1 \cos E_1)$, $R = a(1 - e\cos E)$ abgeleitet werden.

[44]) dE und dE_1 durften bei den von mir gemachten Anwendungen den Betrag von etwa 1° nicht überschreiten.

und analog die Aenderungen des Zählers und Nenners von $\operatorname{tg} E_1$

$$dZ_1 = \alpha \,.\, \cos(E + A) \,.\, dE$$
$$dN_1 = \beta \,.\, \cos(E + B) \,.\, dE$$

3. **Grösse der kürzesten Entfernung.** Hat man die excentrischen Anomalieen in der Proximität gefunden, so erhält man hieraus die wahren

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} E \qquad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v_1 = \sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}} \cdot \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} E_1$$

indem man die soeben (pag. 24) berechneten Wurzelausdrücke benützt. Sind dann $v - V$ und $v_1 - V_1$ ihre Unterschiede von den wahren Anomalieen der Schnittlinie, so geben die Gleichungen[45])

$$\cos \frac{J}{2} \cdot \sin \frac{(v - V) - (v_1 - V_1)}{2} = \sin \frac{\psi}{2} \cdot \sin \frac{d}{2}$$
$$\sin \frac{J}{2} \cdot \sin \frac{(v - V) + (v_1 - V_1)}{2} = \sin \frac{\psi}{2} \cdot \cos \frac{d}{2}$$

den $\sin \frac{\psi}{2}$, zu dem man den zugehörigen cos aufschlägt und aus

$$\triangle \,.\, \sin \tfrac{1}{2} \delta = (r - r_1) \,.\, \cos \tfrac{1}{2} \psi$$
$$\triangle \,.\, \cos \tfrac{1}{2} \delta = (r + r_1) \,.\, \sin \tfrac{1}{2} \psi$$

endlich die kürzeste Distanz $\triangle$ findet. r und r_1 sind vorher durch die Gleichungen

$$r = a\,(1 - e \cos E)$$
$$r_1 = a_1 (1 - e_1 \cos E_1)$$

zu berechnen.

Die Bedeutung von d und δ als Differenzen von gewissen Winkeln und die von ψ (dem von den beiden Radien r und r_1 eingeschlossenen Winkel) kommen nicht in Betracht, da sie selbst nicht aufgesucht werden. Auch hat man nicht nöthig, die Vorzeichen zu beachten.

---

[45]) Bezeichnet man mit s die Summe der beiden Winkel, deren Differenz d in diesen Formeln auftritt, so hat man noch folgende beiden Gleichungen, die $\cos \frac{\psi}{2}$ geben, jedoch kaum in Anwendung kommen dürften:

$$\cos \frac{J}{2} \cos \frac{(v - V) - (v_1 - V_1)}{2} = \cos \frac{\psi}{2} \,.\, \sin \frac{s}{2}$$
$$\sin \frac{J}{2} \,.\, \cos \frac{(v - V) + (v_1 - V_1)}{2} = \cos \frac{\psi}{2} \,.\, \cos \frac{s}{2}$$

In dem Falle, dass die excentrischen Anomalieen sich nur sehr wenig von denen der Schnittlinie unterscheiden, so dass die Differenzen $v - V$ und $v_1 - V_1$ als Differentiale betrachtet werden können, findet man diese durch[46])

$$dv = \frac{a \,.\, \cos \varphi}{r} \cdot dE$$

$$dv_1 = \frac{a_1 \,.\, \cos \varphi_1}{r_1} \, dE_1$$

4. **Zeit der Proximität.** Wie zahlreiche Bahnnähen Littrow auch fand, so bemerkte er doch, dass ein wirkliches Zusammentreffen zweier Planeten in der Proximität selten eintrat. Die später anzuführenden Beispiele gestatten keinen Schluss darüber, doch wird die Annahme einer kleineren Distanz als Grenze der noch als Proximität zu bezeichnenden Annäherungen die durch die inzwischen vermehrte Planetenzahl vergrösserte Wahrscheinlichkeit theilweise paralysiren.

Für einen bestimmten Planeten wird man leicht durch die Jahresephemeriden (im Berliner astronomischen Jahrbuch) erkennen, ob eine Zusammenkunft in der nächsten Zeit in Aussicht stehen dürfte.[47]) Ob eine so aufgefundene Annäherung innerhalb der angenommenen Grenze liegt, wird dann die Berechnung nach dem im 2. und 3. Abschnitt (pag. 16 ff.) beschriebenen Verfahren zeigen, wobei eine wirkliche Aufsuchung der Distanz oft nicht nöthig sein wird, sondern bereits die Differenz $E' - E$ einen Anhalt geben kann. Ist dagegen für einen Planeten der Ort der Proximität berechnet, so hat Littrow[48]) auf folgende Weise die Zeit der Proximität berechnet. Sind t und t' die resp. Zeiten, die von irgend einem

---

[46]) Es ist

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v = \operatorname{tg} (45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi) \,.\, \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} E$$
$$l \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v = l \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} E + l \operatorname{tg} (45^\circ + \tfrac{1}{2}\varphi)$$
$$\operatorname{cosec} v \, dv = \operatorname{cosec} E \, dE$$
$$dv = \frac{\sin v}{\sin E} \, dE$$

oder wegen $r \,.\, \sin v = b \sin E = a \cos \varphi \,.\, \sin E$

$$dv = \frac{a \cos \varphi}{r} \, dE$$

[47]) Vergl. pag. 31.

[48]) Denkschr. XVI, pg. 53 ff., XXXI, pg. 177.

bestimmten Jahre an gezählt wurden, in denen die Planeten einmal einzeln am Orte der Proximität waren, und T und T' sind ihre Umlaufszeiten, so lässt eine Vergleichung der Zahlenreihen $t + aT$ und $t' + aT'$, wenn a der Reihe nach alle ganzzahligen Werthe beigelegt werden, die geringste Zeitdifferenz der Durchgänge der beiden Planeten durch die Proximität ohne weiteres erkennen.

Nicht wesentlich verschieden von dem Verfahren Littrow's wäre das folgende: Wenn E^0 und $E_1{}^0$ die gefundenen excentrischen Anomalieen in der Proximität sind, so findet man die mittleren durch

$$M^0 = E^0 - e \sin E^0$$
$$M_1{}^0 = E_1{}^0 - e_1 \sin E_1{}^0$$

Sind ferner für die Epochen T und T_1 die mittleren Anomalieen M und M_1 gegeben, so liefern die Gleichungen

$$M^0 - M = \mu t'$$
$$M_1{}^0 - M_1 = \mu_1 t_1'$$

die Zeiten t' und t_1', die verfliessen, bis die Planeten einzeln in die Proximität kommen. Setzt man $t = t' + T$, $t_1 = t_1' + T_1$ und bezeichnet mit U und U_1 die beiden Umlaufszeiten, so hat man folgende diophantische Gleichung durch ganze Zahlen aufzulösen

$$t + xU = t_1 + yU_1$$

oder setzt man $t_1 - t = \tau$

$$xU - yU_1 = \tau$$

Wenn etwa $U < U_1$ ist und man entwickelt $\frac{U}{U_1}$ in einen Kettenbruch, dessen letzter Näherungsbruch $\frac{U^r}{U_1{}^r}$ ist, so erhält man bekanntlich als strenge Auflösung folgende ganze Anzahlen von Umläufen:

$$x = U_1{}^r \cdot \tau, \qquad y = U^r \cdot \tau$$

Da es aber nur auf eine genäherte Lösung ankommt, so wird man an Stelle von $\frac{U^r}{U_1{}^r}$ einen früheren, z. B. den h^{ten} Näherungswerth setzen können: $\frac{U^h}{U_1{}^h}$. Wird dann mit Rücksicht auf die Eigenschaft der Näherungsbrüche, nach der sie benannt sind,

$$U = k \cdot U^h, \; U_1 = k \cdot U_1{}^h$$

gesetzt, wobei k auch den grössten gemeinsamen Factor von U und U_1 enthalten soll, so erhält man nach Division mit k

$$x \,.\, U^{h} - y \,.\, U_1{}^{h} = \frac{\tau}{k}$$

Die ursprüngliche Gleichung hatte nur dann eine Lösung, wenn ein gemeinschaftlicher Factor von U und U_1 auch in τ enthalten war, ebenso muss hier $\frac{\tau}{k}$ eine ganze Zahl sein. Wenn dies nicht genau der Fall ist, hat man daher an Stelle von $\frac{\tau}{k}$ die nächste ganze Zahl zu setzen. Die Auflösung giebt jetzt

$$x = \frac{\tau}{k} \cdot U^{h-1}, \qquad y = \frac{\tau}{k} \cdot U_1{}^{h-1}$$

Auf die Zeichen, die sich von selbst ergeben, ist hierbei nicht Rücksicht genommen. Die Differenz von $t + xU$ und $t_1 + yU_1$ wird in Folge der nur angenäherten Berechnung nicht ganz verschwinden; ob die Zwischenzeit zwischen dem Eintreffen beider Planeten in der Proximität klein genug ist, um überhaupt von einer Proximität zu reden, muss jeder einzelne Fall entscheiden.

Noch einfacher als die eben behandelte lässt sich die Frage entscheiden, nach welcher Zwischenzeit eine Proximität wiederkehrt. Hat der eine Planet eine Umlaufszeit von U Tagen, der zweite von U_1, so werden beide, wenn sie von dem Orte ausgehen, wo sie zusammenstanden, dann wieder zusammentreffen, wenn jener U_1, dieser U Umläufe vollendet hat, und zwar zum ersten Mal, wenn U und U_1 keinen gemeinsamen Factor haben. Nun kommt es aber wiederum nicht darauf an, genau den Zeitpunkt zu finden, in welchem sie sich begegnen, sondern es genügt, die Anzahl von Umläufen für beide zu bestimmen, die sich ungefähr entsprechen. Nimmt man daher statt U_1 und U Nenner und Zähler $U_1{}^{h}$ und U^{h} eines Näherungsbruches von $\frac{U}{U_1}$, wenn $U_1 > U$, so weicht das Verhältniss $\frac{U^{h}}{U_1{}^{h}}$ nach einer Eigenschaft der Kettenbrüche von $\frac{U}{U_1}$ höchstens um $\left(\frac{1}{U_1{}^{h}}\right)^2$ ab. Wenn wir also, wie üblich,

durch eckige Klammern den absoluten Werth des Ausdrucks andeuten, so ist

$$\left[\frac{U}{U_1} - \frac{U^h}{U_1{}^h}\right] < \left(\frac{1}{U_1{}^h}\right)^2$$

oder

$$\left[\frac{U.U_1{}^h - U^h.U_1}{U_1.U_1{}^h}\right] < \left(\frac{1}{U_1{}^h}\right)^2$$

mithin ist der Fehler, der dadurch entsteht, dass wir für U U^h und für U_1 $U_1{}^h$ setzen

$$\left[U.U_1{}^h - U^h.U_1\right] < \frac{U_1}{U_1{}^h}$$

$\frac{U_1}{U_1{}^h}$ ist also die Anzahl Tage, um die höchstens der eine Planet von der Bahnnähe absteht, wenn der andere dieselbe passirt.

5. **Dauer der Proximität.** Es knüpft sich noch eine Frage von Interesse an das Vorhergehende, ob zwei Planeten längere Zeit in fast gleicher Entfernung von einander verweilen oder nicht. In der That ist Littrow in dieser Beziehung zu sehr bemerkenswerthen Resultaten gelangt.[49])

Berechnet man in der Nähe der zur Zeit t^0 stattfindenden kürzesten Distanz $\triangle$ eine Distanz D', welche zur Zeit t' statt hat, so hat man mit Rücksicht darauf, dass der erste Differentialquotient für die Proximität verschwindet und mit Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$D' = \triangle + f.(t - t^0)^2$$

und damit f.

Ist dann D der noch zulässige (obere) Grenzwerth der kürzesten Distanz, so liefert die Gleichung

$$D = \triangle + f.(t - t^0)^2$$

zwei Werthe von t, innerhalb deren jene Entfernung nicht überschritten wird. Heissen sie t_1 und t_2, so ist $t_2 - t_1$ die Dauer der Proximität.

[49]) Denkschr. XXXI, pg. 176 ff.

III.

In der Absicht, von dem angegebenen Verfahren eine Anwendung zu geben, musste ich natürlich bei 26796 Combinationen, welche die gegenwärtig bekannten 232 Planeten ergeben, von Vollständigkeit ganz abstrahiren. Andererseits bleibt vielleicht das Herausfinden solcher Planeten, die eine kleine Proximität ergeben, ein überhaupt unerreichtes Ziel. Denn auch Zeichnungen geben nur bis zu einer gewissen, wohl noch beträchtlich zu hoch liegenden Grenze mit einiger Sicherheit die Unterschiede der kürzesten Entfernungen.

Das immerhin geeignetste Mittel schien mir die Benutzung der Jahresephemeriden. Die Uebereinstimmung von Rectascension und Declination bezeichnet eine optische Annäherung, zu einer räumlichen Proximität ist auch die Uebereinstimmung der Entfernungen von Sonne und Erde erforderlich.[50]) Ich ging zu diesem Zweck den Jahrgang 1883 des Berliner astronomischen Jahrbuchs durch und berechnete Neigung, Lage und Grösse der Radien der Schnittlinie für die ausgewählten Planeten. Unter den 51 Planetenpaaren, die ich so erhielt, fand sich eine Anzahl, deren Distanz in der Knotenlinie unter der von D'Arrest für die Proximität angenommenen, von Littrow anfangs festgehaltenen oberen Grenze von 0,1 blieb, doch habe ich geglaubt, dass diese viel zu hoch gegriffen sei und nur die unter 0,01 (d. h. etwa der vierfachen Entfernung von Erde und Mond)[51]) liegenden Distanzen als Proximität bezeichnen zu können geglaubt. Doch habe ich nur für die Planetenpaare die kürzeste Distanz berechnet, bei denen bereits die Radiendifferenz in der Knotenlinie unter dieser Grenze lag, indem ich von der vielleicht in einzelnen Fällen unrichtigen Voraussetzung ausging, dass so kleine Proximitäten nur in der Nähe

---

[50]) Wieviel man von der Strenge dieser Forderungen nachlassen kann, muss die Erfahrung zeigen; für die Besitzer der heliocentrischen Coordinaten (x, y, z) der Planeten dürften diese ein wohl noch geeigneteres Hilfsmittel darbieten.

[51]) Diese Entfernung kommt im Sonnensystem beim 7. Saturntrabanten Hyperion als halbe Axe seiner Bahn vor. Eine Proximität in diesem Sinne würden noch der 1. und 4. Jupitertrabant liefern, wenn sie, vom Planeten betrachtet, in Conjunction stehen.

der Knotenlinie stattfinden können, wenigstens wenn die gegenseitige Neigung der Bahnen nicht ganz klein ist. Denn da ein wirklicher Schnitt der Bahnlinien nur in der Knotenlinie stattfinden kann, so wird allerdings eine sehr kleine Distanz in ihrer Nähe vermuthet werden dürfen. Unter den berechneten fanden sich nur zwei Paare, Doris-Chryseis und das von Littrow mir bekannte Beispiel Bellona-Thetis, welche in der Knotenlinie um weniger als 0,01 entfernte Bahnpunkte hatten, und für die daher der Ort der Proximität berechnet wurde.

Auf weitere Planeten, bei denen bedeutendere Annäherungen zu erwarten waren, wurde ich durch die bereits in der historischen Uebersicht erwähnte (pag. 4) interessante Abhandlung von Daniel Kirkwood[52]) aufmerksam. Er stellt vier Paare von Planeten (ein fünftes Sirona-Ceres hat sich durch den Umstand eingeschlichen, dass bei Sirona die Neigung irrthümlich = $11^0\ 35'$ statt $3^0\ 35'$ angegeben ist) zusammen. die eine überraschende Aehnlichkeit in den Elementen zeigen. Ich habe ihnen noch zwei hinzugefügt, bei denen allerdings die Sicherheit der Elemente noch nicht gut verbürgt ist. Es wird von Interesse sein, hier eine Zusammenstellung zu finden:[53])

	π	Ω	i	e	a
	$^0\ '$	$^0\ '$	$^0\ '$		
(19) Fortuna	31 3	211 27	1 33	0,1594	2,4415
(79) Eurynome	44 22	206 24	4 37	0,1945	2,4436
(37) Fides	66 26	8 21	3 7	0,1758	2,6440
(66) Maja	46 21	8 17	3 5	0,1655	2,6495
(97) Klotho	65 35	160 44	11 45	0,2580	2,6679
(3) Juno	54 50	170 53	13 1	0,2579	2,6682
(122) Gerda	204 28	178 44	1 37	0,0407	3,2148
(167) Urda	32 39	170 7	1 42	0,3121	3,2186
(52) Europa	106 48	129 39	7 27	0,1106	3,0962
(159) Aemilia	101 20	135 14	6 5	0,1094	3,1075
(200) Dynamene	46 39	325 26	6 56	0,1334	2,7378
(203) Pompeja	43 24	348 38	3 13	0,0596	2,7389

[52]) l. c. (Note 14) pag. 369.

[53]) Für die ersten 3 Planetenpaare sind die Zahlenwerthe, wie sie Kirkwood anführt, beibehalten. Für die 3 andern liegen die Angaben des Berl. astr. Jahrbuchs für 1883 zu Grunde, mit denen (auch für jene ersten) die unten folgenden Rechnungen ausgeführt sind. Auf die Aehnlichkeit der Bahnen von Urda und Gerda hat bereits ihr Entdecker C. H. F. Peters in Clinton aufmerksam gemacht.

Ausser für die letzte Combination, bei der die Aehnlichkeit geringer war und die Elemente des ersten Planeten noch unsicher sind, wurden für die vorstehenden Planetenpaare die Proximitäten berechnet und die Hoffnung auf kleine Proximitäten bestätigt gefunden.

Einer Anregung meines Vaters verdanke ich sodann einer Frage näher getreten zu sein, deren eingehende und vollständige Behandlung eine besondere Untersuchung in Anspruch nehmen würde, bei der aber die Aufsuchung von Proximitäten von grosser Bedeutung ist. Die aus den Störungen verschiedener kleinen Planeten geschlossenen Werthe für die Jupitersmasse haben zu Resultaten geführt, die zum Theil von den von Bessel u. a. aus Elongationen der Jupiterstrabanten erhaltenen abweichen,[54]) und es lag nahe zu vermuthen, dass

[54]) Ueber die verschiedenen Bestimmungen der Jupitersmasse sehe man: Olbers „Ueber Herrn Professor Airy's neue Bestimmung der Jupitersmasse" in den kleinen astr. Ephemeriden v. Harding und Wiesen f. 1834; sodann: Encke, Ueber den Cometen von Pons, 4. Abh. Berlin 1844, pag. 6, und Dr. W. Schur. Bestimmung der Masse des Planeten Jupiter in den „Nova acta der kaiserl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher XLV Nr. 3. Halle 1882. Aus dieser Arbeit entnehme ich die folgende Uebersicht:

Aus Trabantenmessungen fand

Triesnecker das Verhältniss der Sonnen- zur Jupitersmasse				
	1048,55			
Santini	51,09	Durch Kometenstörungen fand dasselbe		
Airy	47,81	Möller	1047,79	(o≪ Faye)
Bessel	47,91	v. Asten	1050,48	(o≪ Encke)
Jacob	47,54	im Mittel	1049,14	
Vogel	47,76			
Schur	47,23			
im Mittel	1048,27			

Die Resultate aus den Planetenstörungen sind folgende:

Nicolai fand durch	Juno	1053,92
Encke	Vesta	50,36
Schubert	Thalia	48,23
Krüger	Themis	47,54
Hansen	Egeria	51,12
Becker	Amphitrite	47,37
	im Mittel	1049,76

Sieht man von den nicht zuverlässigen Bestimmungen von Triesnecker und Santini ab, so fanden sich durch die Trabantenelongationen weit übereinstimmendere Resultate, als sie aus den Planetenstörungen erzielt wurden. Beim Encke'schen Cometen könnte ebenfalls an einen Einfluss der Asteroiden gedacht werden.

unberücksichtigte gegenseitige Störungen der Asteroiden Einfluss auf die Ergebnisse gehabt haben. Insbesondere zeigt das Resultat von Nicolai, das er aus den Störungen der Juno durch Jupiter ableitete, eine erhebliche Abweichung. Da zudem die Junobahn sich ziemlich in der Mitte des ganzen Asteroidenringes befindet,[55]) so konnten Annäherungen an andere Bahnen bei ihr wohl erwartet werden. Um dies zu untersuchen, habe ich die Radien in den Schnittlinien der Junobahn mit den Bahnen der ersten 200 Asteroiden, die Lage derselben und die Neigungen der Bahnen gegen die Ebene der Juno berechnet. Bei 47 Planeten blieb die Differenz der Radien in der Schnittlinie unter 0,1, unter ihnen fanden sich wiederum 8, bei denen diese Distanz kleiner als 0,01 war. Für diese wurden die Proximitäten berechnet.[56])

Es folgen nunmehr die Resultate der für die drei verschiedenen Klassen von Beispielen ausgeführten Rechnungen.

1.

Die folgenden Planeten sind (ausgenommen das 13. Paar) auf Grund der Jahresephemeriden des Jahrgangs 1883 des Berliner astronomischen Jahrbuchs ausgewählt, indem diese Proximitäten vermuthen liessen; in der folgenden Zusammenstellung bedeutet J die gegenseitige Neigung der Bahnen, U das dem nördlichen Theil der Schnittlinie zugehörige Argument der Breite, V die entsprechende wahre Anomalie, die also für den südlichen Schnitt beide um 180^0 zu ändern sind, R und R' die Radien in der Schnittlinie. Die Anordnung ist derartig, dass der früher entdeckte Planet dem anderen voransteht; die zuerst stehenden sind dann wiederum nach ihren Zahlzeichen geordnet. Die Rechnungen sind zumeist mit vierstelligen Logarithmen ausgeführt. Zu Grunde lagen denselben, wo nicht etwas anderes erwähnt ist, die Elemente aus dem Jahrbuche für 1883.

[55]) Ordnet man die Asteroiden nach der mittleren Entfernung von der Sonne, so nimmt Juno etwa die 100. Stelle ein.

[56]) Eine gegenseitige Einwirkung zweier Planeten ist besonders bei einem längeren Verweilen in kleiner Distanz zu erwarten, selbst wenn diese den hier als Maximum angenommenen Betrag überschritte.

	Zeichen	Namen der Planeten	J	Nördlicher Schnitt U	Nördlicher Schnitt V	Nördlicher Schnitt R	Südl. Schnitt R'	
1	4	Vesta	8° 2,2′	22° 45,3′	235° 4,4′	2,468	2,233	Die Elemente sind dem Jahrb. v. 1884 entnommen.
	37	Fides		117 47,7	60 0,2	2,349	2,809	
2	4	Vesta	11 30,0	24 19,9	236 39,0	2,463	2,237	
	63	Ausonia		149 31,5	217 6,2	2,620	2,148	
3	4	Vesta	9 13,8	42 46,3	255 5,4	2,399	2,294	
	128	Nemesis		129 20,7	189 4,6	3,098	2,402	
4	4	Vesta	6 25,4	54 52,4	267 11,5	2,354	2,335	
	166	Rhodope		29 10,0	127 52,1	2,959	2,272	
5	7	Iris	9 38,0	81 13,1	299 37,7	2,028	2,550	
	54	Alexandra		27 29,3	46 37,0	2,297	3,014	
6	7	Iris	5 29,0	66 21,9	284 46,5	2,134	2,406	
	67	Asia		123 11,5	19 15,4	1,987	2,837	
7	9	Metis	6 29,4	168 52,3	166 20,0	2,671	2,100	
	157	Dejanira		174 49,1	129 56,0	2,853	2,174	
8	11	Parthenope	3 24,4	129 30,1	296 52,7	2,326	2,543	
	213	Lilaea		132 4,3	330 25,1	2,381	3,073	
9	14	Irene	8 59,6	15 17,2	282 29,1	2,433	2,611	
	73	Klytia		94 11,0	43 57,8	2,583	2,743	
10	15	Eunomia	10 30,4	45 35,2	311 35,4	2,268	2,912	
	78	Diana		104 58,6	317 8,8	2,175	2,957	
11	15	Eunomia	4 56,2	99 57,2	5 57,4	2,150	3,134	
	141	Lumen		75 9,0	20 23,9	2,126	3,178	
12	15	Eunomia	2 6,2	109 26,8	15 27,0	2,159	3,116	
	165	Loreley		99 23,8	126 32,6	3,255	2,971	
13	17	Thetis	4 28,4	43 51,6	266 51,0	2,451	2,417	[57]
	28	Bellona		24 35,8	45 19,9	2,460	3,035	
14	19	Fortuna	3 36,2	24 1,1	204 38,0	2,782	2,081	
	90	Antiope		136 54,5	294 0,1	2,863	3,281	
15	20	Massalia	2 37,6	153 13,4	259 34,8	2,422	2,300	
	46	Hestia		178 16,4	5 12,5	2,112	2,939	
16	22	Kalliope	16 19,8	44 47,2	51 45,3	2,704	3,073	
	134	Sophrosyne		123 37,2	42 28,3	2,327	2,768	
17	24	Themis	1 40,5	52 3,2	303 37,2	2,875	3,318	
	90	Antiope		16 10,2	146 15,8	3,552	2,685	

[57]) Diese Planeten sind zum Vergleich mit Littrows Resultaten gerechnet und hier gelegentlich mit angeführt. Es wurden für sie die Elemente des Jahrbuchs für 1884 benützt.

	Zeichen	Namen der Planeten	J	Nördlicher Schnitt			Südl. Schnitt
				U	V	R	R'
18	26	Proserpina	4° 56,4	24° 34,2	194° 3,9	2,871	2,429
	142	Polana		138 8,2	210 31,3	2,684	2,134
19	26	Proserpina	8 37,4	173 52,5	343 22,2	2,432	2,876
	152	Atala		178 11,1	134 53,2	3,272	2,967
20	27	Euterpe	3 12,8	170 55,1	176 47,0	2,755	1,940
	86	Semele		176 59,5	235 6,0	3,300	2,569
21	27	Euterpe	9 18,2	162 49,1	168 41,0	2,745	1,945
	179	Klytemnästra		3 27,9	261 50,2	2,984	2,895
22	35	Leukothea	7 56,8	163 50,0	317 46,6	2,435	3,405
	90	Antiope		88 19,2	218 24,8	3,518	2,704
23	35	Leukothea	11 33,0	106 53,0	260 49,6	2,945	2,742
	157	Dejanira		40 53,8	356 0,7	2,040	3,122
24	37	Fides	5 52,0	97 43,0	40 13,7	2,258	2,957
	128	Nemesis		29 37,0	89 20,9	2,702	2,709
25	39	Laetitia	0 24,8	170 12,1	323 53,5	2,506	3,006
	51	Nemausa		169 48,1	171 16,1	2,524	2,206
26	43	Ariadne	4 7,8	62 56,7	49 19,5	1,932	3,027
	74	Galatea		129 35,3	318 56,7	2,220	3,197
27	43	Ariadne	10 5,6	98 30,5	84 53,3	1,864	2,518
	101	Helena		19 46,7	35 34,0	2,278	2,859
28	45	Eugenia	7 51,2	177 8,0	94 27,7	2,887	2,548
	64	Angelina		14 23,6	200 54,8	2,992	2,364
29	47	Aglaja	5 22,8	82 34,5	133 26,5	3,109	2,599
	118	Peitho		39 33,5	9 32,1	2,050	2,823
30	48	Doris	6 27,0	85 26,4	199 48,0	3,301	2,921
	202	Chryseis		132 11,6	142 16,7	3,309	2,837
31	55	Pandora	13 9,0	124 43,5	123 20,8	2,933	2,505
	61	Danae		160 43,1	150 23,6	3,387	2,545
32	55	Pandora	4 29,6	97 55,6	96 32,9	2,747	2,659
	68	Leto		64 7,2	123 54,1	2,978	2,412
33	60	Echo	1 27,6	53 10,5	145 50,9	2,726	2,011
	79	Eurynome		38 31,1	200 53,0	2,872	1,990
34	62	Erato	7 54,0	138 36,9	225 23,3	3,454	2,695
	153	Hilda		36 12,3	338 45,0	3,371	4,507
35	62	Erato	1 32,8	129 41,5	216 27,9	3,525	2,653
	167	Urda		85 22,1	222 50,2	3,770	2,365
36	62	Erato	4 50,8	110 54,4	197 40,8	3,634	2,592
	168	Sibylla		26 59,2	223 45,6	3,548	3,204

	Zeichen	Namen der Planeten	J	Nördlicher Schnitt U	Nördlicher Schnitt V	Nördlicher Schnitt R	Südl. Schnitt R'
37	63	Ausonia	9° 58′,5	136° 5′,4	203° 40′,1	2,663	2,119
	128	Nemesis		39 53,4	99 37,3	2,765	2,649
38	75	Eurydike	4 33,4	97 59,3	122 24,9	2,891	2,077
	133	Cyrene		136 33,7	210 28,3	3,408	2,676
39	75	Mnemosyne	22 3,4	89 45,5	236 13,8	3,319	2,918
	183	Istria		143 55,7	241 42,1	3,708	2,646
40	77	Frigga	1 5,6	75 22,4	18 32,3	2,331	2,996
	126	Velleda		54 16,4	89 37,7	2,411	2,414
41	79	Eurynome	8 37,0	163 13,0	325 34,9	2,026	2,799
	108	Hekuba		17 38,4	196 33,2	3,525	2,894
42	97	Klotho	16 5,2	169 54,9	265 10,8	2,552	2,444
	111	Ate		24 28,7	222 0,3	2,782	2,378
43	104	Klymene	2 8,2	46 53,7	30 53,2	2,705	3,553
	106	Dione		27 14,7	64 31,3	2,847	3,319
44	114	Kassandra	9 17,8	50 37,8	62 16,1	2,462	2,807
	152	Atala		173 27,8	130 9,9	3,297	2,947
45	117	Lomia	3 20,4	174 28,0	115 21,0	3,019	2,961
	193	Ambrosia		172 54,2	93 17,2	2,406	2,328
46	121	Hermione	6 48,0	130 19,0	208 31,1	3,825	3,068
	159	Aemilia		72 12,0	106 6,2	3,166	2,981
47	121	Hermione	2 11,0	112 34,6	190 46,7	3,884	3,030
	171	Ophelia		88 15,0	45 25,5	2,869	3,382
48	135	Hertha	0 56,6	122 42,8	146 44,1	2,807	1,985
	208	Lacrimosa		98 52,4	233 24,8	2,954	2,779
49	145	Adeona	1 45,0	59 20,6	18 31,5	2,342	2,981
	146	Lucina		52 55,6	281 6,9	2,673	2,746
50	167	Urda	1 25,0	58 25,3	195 53,4	4,152	2,235
	168	Sibylla		18 45,7	215 32,1	3,571	3,184
51	195	Eurykleia	7 48,0	122 11,2	23 46,6	2,625	3,109
	196	Philomela		57 29,0	138 36,5	3,101	3,076

Die kleinsten Distanzen (unter 0,1), welche sich in der Knotenlinie ergaben, sind folgende (N oder S bezeichnet, ob in dem nördlichen oder südlichen Theil der Schnittlinie die Annäherung stattfindet):

7 Metis — Dejanira 0,074 S

8 Parthenope — Lilaea 0,055 N

10	Eunomia — Diana	0,094	N
		0,045	S
11	Eunomia — Lumen	0,024	N
		0,044	S
14	Fortuna — Antiope	0,081	N
19	Proserpina — Atala	0,091	S
25	Laetitia — Nemausa	0,018	N
30	Doris — Chryseis	0,008	N
		0,084	S
31	Pandora — Danae	0,040	S
33	Echo — Eurynome	0,021	S
		0,046	N
36	Erato — Sibylla	0,086	N
40	Frigga — Velleda	0,080	N
41	Eurynome — Hekuba	0,095	S
42	Klotho — Ate	0,066	S
46	Hermione — Aemilia	0,087	S
51	Eurykleia — Philomela	0,033	S

Unter 0,01 lag hiernach die Differenz der Radien in der gemeinsamen Knotenlinie bei Doris — Chryseis und bei dem unter vorstehenden nicht aufgeführten Planetenpaar 13. Thetis — Bellona (vergl. Note 57). Für diese beiden Combinationen wurden (siehe pag. 31. 32) die Proximitäten berechnet. Wenn $\triangle$ die kürzeste Entfernung bedeutet, so sind folgende Daten für die Proximität gefunden:

		E	v	$\triangle$
(17)	Thetis	23° 49',2	44° 31',6	0,0002
(28)	Bellona	273 19,8	265 53,6	
(48)	Doris	200 50,2	199 45,8	0,006
(202)	Chryseis	138 28,0	141 42,0	

2.

Für die durch die Aehnlichkeit der Elemente ausgezeichneten (und auf pag. 32 aufgeführten) Planetenbahnen schien die früher (pag. 31) gemachte Annahme, dass die Proximität in der Nähe der Knotenlinie liege, nicht mehr berechtigt.

Ausser für Dynamene-Pompeja[58]) wurden für diese Planeten die Proximitäten berechnet, die allerdings zum Theil die gesteckte Grenze von 0,01 überschreiten.[59])

	Zeichen	Namem der Planeten	J	Nördlicher Schnitt			Südl. Schnitt	Proximität	
				U	V	R	R'	E	Δ
52	3	Juno	2° 29,0	54° 51,2	170° 7,5	3,335	1,996	357° 23,0	0,0104
	97	Klotho		64 37,8	159 53,7	3,283	2,014	349 29,3	
53	19	Fortuna	3 4,4	173 6,4	353 43,3	2,057	2,826	154 4,6	0,0411
	79	Eurynome		177 41,4	340 3,3	1,987	2,877	136 56,4	
54	37	Fides[60])	0 1,1	177 23,5	119 36,0	2,806	2,352	344 49,4	0,0469
	66	Maja		177 22,6	138 4,9	2,947	2,270	0 18,5	
55	52	Europa	1 30,7	156 59,8	179 50,5	3,439	2,754	178 9,4	0,0069
	159	Aemilia		151 26,8	185 21,0	3,445	2,769	184 18,0	
56	122	Gerda	0 16,0	106 15,6	80 32,0	3,188	3,232	79 19,8	0,0032
	167	Urda		114 51,0	252 19,1	3,211	2,655	271 44,3	
57	200	Dynamene	4 10,2	162 19,1	81 6,6	2,745	2,634	—	—
	203	Pompeja		139 11,5	84 25,1	2,742	2,716		

Europa und Aemilia nähern sich nochmals bedeutend (bis auf 0,0132) bei

$$E = 356^\circ\ 6{,}'4 \quad E_1 = 1^\circ\ 2{,}'1.$$

3.

Es folgen nunmehr die Resultate, welche sich für den Planeten Juno ergaben. Jede obere Reihe bezieht sich in der

[58]) Vergl. pag. 32.

[59]) Bisweilen ergiebt sich die Distanz in der Proximität unbedeutend grösser als in der Knotenlinie, was bei der Unsicherheit der 4. Decimale ohne Bedeutung ist. Von Interesse wird es noch sein, die Differenzen der wahren Anomalieen in der Proximität und in der Knotenlinie (im Sinne $P - K$) hier zu finden.

Juno	+ 6° 28,'9	Fides	+ 42° 16,'4
Klotho	+ 9 16,1	Maja	+ 42 17,1
Fortuna	— 15 55,5	Europa	— 1 29,5
Eurynome	— 15 57,3	Aemilia	— 1 29,8
		Gerda	+ 1° 6,'4
		Urda	+ 1 29,9

[60]) Für Fides und Maja wurde die Rechnung fünfstellig durchgeführt. Die Proximität findet sich bei

$$E = 344^\circ\ 49'\ 24''\quad E_1 = 0^\circ\ 18'\ 31''\quad \Delta = 0{,}04694.$$

folgenden Uebersicht auf diesen, jede untere auf den in der ersten Verticalcolumne angegebenen Planeten. Hinzugefügt sind noch die Bemerkungen „aussen“ und „innen“, welche andeuten sollen, ob die andere Planetenbahn die Junobahn ganz umschliesst oder ob sie ganz innerhalb der Junobahn liegt. Wo keine derartige Notiz steht, greifen die beiden Bahnringe ähnlich wie die Glieder einer Kette ineinander.

(Nach den Elementen aus dem Berl. astr. Jahrbuch für 1883.)

Zeichen	Namen der Planeten	J	Nördlicher Schnitt			Südl. Schnitt	
			U	V	R	R'	
1	Ceres	16° 43′,6	39° 50′,1	55° 6′,4	3,249	2,548	
			128 27,7	60 1,3	2,028	2,985	
2	Pallas	21 42,4	3 4,6	118 20,9	3,219	2,040	
			1 8,8	51 43,4	2,274	3,069	
4	Vesta	12 8,6	32 57,0	148 13,3	3,188	2,052	
			99 20,6	311 39,7	2,495	2,221	
5	Astraea	8 46,0	17 17,5	132 43,8	3,020	2,129	
			46 13,3	52 53,8	2,230	2,804	
6	Hebe	7 46,2	87 8,6	202 24,9	3,268	2,020	
			118 11,0	61 31,4	2,574	2,121	
7	Iris	14 0,4	156 48,7	272 5,0	2,474	2,520	innen
			68 34,1	286 58,7	2,117	2,422	
8	Flora	11 18,8	27 1,2	142 17,5	3,128	2,078	innen
			86 48,8	164 12,1	2,529	1,867	
9	Metis	15 12,0	21 20,3	136 46,6	3,067	2,105	
			122 49,9	120 17,6	2,507	2,213	
10	Hygiea	15 1,6	166 35,1	281 51,4	2,372	2,635	aussen
			51 55,9	100 8,9	3,041	3,165	
11	Parthenope	10 19,0	18 43,8	34 0,1	3,035	2,121	
			63 53,8	231 16,4	2,589	2,288	
12	Victoria	12 5,6	140 55,0	256 11,3	2,658	2,353	
			76 51,4	10 46,7	1,828	2,831	
13	Egeria	26 30,2	30 25,9	145 42,2	3,163	2,062	
			156 22,1	79 23,7	2,516	2,598	
14	Irene	15 2,6	37 28,5	152 44,8	3,228	2,036	
			120 18,1	27 30,0	2,200	2,944	
15	Eunomia	21 45,0	152 39,3	267 55,6	2,520	2,474	
			30 34,7	296 34,9	3,064	2,185	

Zeichen	Namen der Planeten	J	Nördlicher Schnitt			Südl. Schnitt	
			U	V	R	R'	
16	Psyche	10° 11′,4	5° 58′,9	121° 15′,2	2,877	2,205	aussen
			25 56,1	162 35,2	3,302	2,528	
17	Thetis	9 54,6	23 51,4	139 7,7	3,093	2,093	
			68 50,8	291 50,2	2,322	2,557	
18	Melpomene	4 59,4	45 28,7	160 45,0	3,289	2,012	innen
			65 40,1	200 38,4	2,748	1,817	
19	Fortuna	11 53,2	175 5,8	290 22,1	2,293	2,740	
			134 33,6	315 9,9	2,086	2,773	
20	Massalia	12 28,2	178 8,5	293 24,8	2,267	2,779	
			142 27,1	248 48,5	2,488	2,244	
21	Lutetia	13 23,0	13 27,0	128 43,5	2,971	2,153	innen
			103 17,6	216 41,4	2,726	2,099	
22	Kalliope	21 2,0	39 56,9	155 13,2	3,249	2,027	
			142 29,9	149 28,0	3,157	2,642	
23	Thalia	18 13,6	33 36,9	148 53,2	3,195	2,049	
			135 24,5	79 38,6	2,387	2,594	
24	Themis	13 36,4	2 25,0	117 41,3	2,833	2,233	
			137 28,8	29 2,8	2,768	3,472	
25	Phocaea	14 58,2	78 44,0	194 0,3	2,661	2,352	
			36 54,6	308 14,9	1,936	2,664	
26	Proserpina	15 21,4	11 13,4	126 29,7	2,943	2,168	
			135 38,0	305 7,7	2,509	2,775	
27	Euterpe	12 45,0	7 1,6	122 17,9	2,891	2,198	
			83 40,0	89 31,9	2,276	2,280	
28	Bellona	6 8,8	41 46,4	157 2,7	3,263	2,021	
			66 19,6	87 12,9	2,697	2,736	
29	Amphitrite	19 7,2	1 57,3	117 13,6	2,826	2,236	
			175 51,7	116 9,5	2,596	2,432	
30	Urania	14 38,0	174 22,0	289 38,3	2,300	2,731	innen
			37 8,0	313 38,5	2,138	2,552	
31	Euphrosyne	37 15,8	29 1,0	144 17,3	3,149	2,069	aussen
			166 4,8	104 25,3	3,167	2,834	
32	Pomona	10 22,2	156 0,7	271 17,0	2,482	2,512	
			106 27,1	133 48,2	2,726	2,429	
33	Polyhymnia	14 52,4	2 23,8	117 40,1	2,832	2,233	
			163 49,8	190 42,7	3,801	1,900	
34	Circe	7 50,2	170 17,1	285 33,4	2,337	2,681	
			156 25,9	190 18,4	2,971	2,398	

Zeichen	Namen der Planeten	J	Nördlicher Schnitt			Südl. Schnitt	
			U	V	R	R'	
35	Leukothea	21° 12',0	86° 50',2	202° 6',5	3,270	2,019	
			272 0,2	65 56,8	2,604	3,128	
36	Atalante	31 37,2	5 18,9	120 35,2	2,869	2,210	
			176 16,1	132 45,6	3,139	2,069	
37	Fides	15 59,6	4 32,0	179 48,3	2,859	2,715	innen
			166 49,0	169 19,7	2,216	2,423	
38	Leda	17 58,4	161 24,6	276 40,9	2,425	2,573	
			36 20,8	231 56,2	2,957	2,440	
39	Laetitia	3 46,2	38 52,3	154 8,6	3,241	2,030	
			51 52,5	205 33,9	3,041	2,482	
40	Harmonia	12 45,2	19 9,4	134 25,7	3,039	2,118	
			95 45,6	188 26,4	2,372	2,162	
41	Daphne	3 36,8	39 59,0	155 15,3	3,249	2,027	
			31 46,2	350 21,4	2,035	3,492	
42	Isis	15 4,0	34 54,9	150 11,2	3,207	2,045	
			120 7,7	246 37,7	2,596	2,125	
43	Ariadne	13 41,8	165 15,0	280 31,3	2,386	2,618	innen
			71 43,0	58 5,8	1,969	2,352	
44	Nysa	10 26,0	13 7,1	128 23,4	2,967	2,155	
			152 24,7	71 45,4	2,258	2,484	
45	Eugenia	7 22,8	30 1,3	145 17,6	3,159	2,064	
			31 17,9	309 37,6	2,575	2,853	
46	Hestia	10 49,6	177 42,3	292 58,6	2,271	2,773	
			166 57,3	353 53,4	2,113	2,938	
47	Aglaja	17 55,0	3 48,9	119 5,2	2,850	2,221	aussen
			170 5,9	220 56,9	3,139	2,579	
48	Doris	6 53,8	166 32,9	281 49,2	2,373	2,634	aussen
			152 28,1	266 49,7	3,110	3,088	
49	Pales	14 49,8	169 20,5	384 36,8	2,346	2,668	aussen
			49 42,5	309 8,5	2,552	3,442	
50	Virginia	10 13,8	179 11,3	294 27,6	2,258	2,792	
			176 15,9	340 6,4	1,920	3,328	
51	Nemausa	3 14,0	164 5,9	280 22,2	2,387	2,617	
			159 4,1	160 32,1	2,515	2,212	
52	Europa	8 51,0	33 33,1	148 49,4	3,194	2,050	
			74 0,3	96 51,0	3,099	3,019	
53	Kalypso	8 54,2	15 14,5	130 30,8	2,992	2,142	
			41 39,7	92 46,3	2,532	2,482	

Zeichen	Namen der Planeten	J	Nördlicher Schnitt			Südl. Schnitt	
			U	V	R	R'	
54	Alexandra	23° 30,8′	161° 17,0′	276° 33,3′	2,427	2,572	
			18 46,6	37 54,3	2,291	3,026	
55	Pandora	19 57,6	7 19,9	122 36,2	2,895	2,195	aussen
			166 47,1	165 24,4	3,137	2,373	
56	Melete	6 29,0	150 27,3	265 43,6	2,545	2,450	
			127 19,1	26 56,7	2,025	3,107	
57	Mnemosyne	7 24,0	87 38,8	202 55,1	2,021	3,263	
			59 6,8	206 35,1	3,464	2,815	
58	Concordia	8 6,0	5 50,0	121 6,3	2,876	2,207	
			15 8,6	347 18,4	2,588	2,812	
59	Elpis	4 24,2	0 13,3	115 29,6	2,805	2,250	aussen
			0 18,7	162 20,4	3,012	2,408	
60	Echo	9 45,8	172 20,0	287 36,3	2,318	2,705	
			151 15,8	243 56,2	1,970	2,805	
61	Danae	30 56,0	170 5,1	285 21,4	2,339	2,678	
			7 7,3	356 47,8	2,498	3,472	
62	Erato	11 33,6	7 47,3	123 3,6	2,900	2,192	aussen
			52 30,1	139 16,5	3,492	2,672	
63	Ausonia	18 43,0	176 3,4	291 19,7	2,285	2,752	
			8 50,2	76 24,9	2,293	2,431	
64	Angelina	14 3,6	176 31,3	291 47,6	2,281	2,758	
			30 25,7	216 56,9	2,937	2,400	
65	Cybele	9 38,4	4 16,7	179 33,0	2,856	2,218	aussen
			16 3,1	273 44,4	3,366	3,414	
66	Maja	15 59,8	3 24,4	118 40,7	2,845	2,224	aussen
			165 38,4	126 20,7	2,859	2,326	
67	Asia	8 32,8	158 7,7	273 24,0	2,460	2,536	
			126 26,1	22 30,0	1,993	2,824	
68	Leto	18 47,0	20 27,2	135 43,5	3,055	2,111	aussen
			145 21,4	205 8,3	3,234	2,292	
69	Hesperia	5 22,6	155 9,4	270 25,7	2,492	2,502	aussen
			138 54,2	217 36,2	3,344	2,550	
70	Panopaea	21 35,6	27 29,4	142 45,7	3,133	2,075	
			148 56,8	256 21,6	2,643	2,426	
71	Niobe	34 46,0	157 1,4	272 17,7	2,472	2,523	aussen
			12 52,0	107 17,0	2,821	2,544	
72	Feronia	10 3,0	162 48,2	278 4,5	2,411	2,589	
			126 0,2	25 56,4	2,014	2,505	

Zeichen	Namen der Planeten	J	Nördlicher Schnitt			Südl. Schnitt	
			U	V	R	R'	
73	Klytia	15° 19,4′	2° 39,7′	117° 56,0′	2,835	2,231	
			165 32,7	115 19,5	2,709	2,614	
74	Galatea	9 38,0	169 0,1	284 16,4	2,349	2,664	
			142 0,5	331 21,9	2,165	3,317	
75	Eurydike	17 59,2	2 36,3	117 52,6	2,835	2,231	
			173 16,3	197 41,9	3,419	1,872	
76	Freia	11 34,0	173 13,5	288 29,8	2,310	2,716	aussen
			131 55,5	252 48,9	3,497	3,159	
77	Frigga	15 26,8	1 49,1	117 5,4	2,825	2,237	
			170 25,7	113 35,6	2,768	2,491	
78	Diana	21 27,0	173 9,7	288 26,0	2,311	2,716	
			10 15,9	222 26,1	2,959	2,174	
79	Eurynome	9 40,6	163 37,1	278 53,4	2,402	2,599	innen
			127 51,1	290 13,0	2,217	2,537	
80	Sappho	9 37,2	138 16,2	253 32,5	2,328	2,691	innen
			91 7,4	314 7,5	1,934	2,560	
81	Terpsichore	20 50,2	4 39,4	119 55,7	2,861	2,215	aussen
			172 22,7	169 38,0	3,441	2,258	
82	Alkmene	15 15,4	6 14,0	121 30,3	2,881	2,203	aussen
			149 45,4	122 48,5	2,985	2,345	
83	Beatrix	17 17,0	10 8,3	125 24,6	2,930	2,176	
			152 56,3	125 25,2	2,538	2,298	
84	Klio	21 55,8	170 40,9	285 21,2	2,339	2,678	innen
			13 48,1	46 25,5	1,917	2,664	
85	Io	7 8,0	115 2,8	230 19,1	2,983	2,148	
			82 38,2	238 50,1	2,837	2,320	
86	Semele	13 17,2	21 8,3	136 24,6	3,063	2,107	aussen
			103 28,3	161 34,8	3,725	2,450	
87	Sylvia	17 37,2	38 38,0	153 54,3	3,239	2,031	aussen
			132 4,4	233 48,8	3,648	3,305	
88	Thisbe	15 22,2	160 46,6	276 2,9	2,432	2,565	
			54 24,4	22 40,5	2,348	3,166	
89	Julia	27 31,2	157 42,6	272 58,9	2,464	2,531	
			17 51,4	336 6,7	2,118	2,956	
90	Antiope	13 34,2	9 37,0	124 53,3	2,923	2,179	aussen
			108 35,4	238 41,0	3,348	2,813	
91	Aegina	15 2,8	2 50,8	118 7,1	2,838	2,229	
			162 32,2	91 28,9	2,568	2,554	

Zeichen	Namen der Planeten	J	Nördlicher Schnitt			Südl. Schnitt	
			U	V	R	R'	
92	Undina	13° 0,4′	45° 15,4′	160° 31,7′	3,287	2,013	aussen
			112 1,8	245 38,9	3,298	3,029	
93	Minerva	21 27,0	5 52,4	121 8,7	2,876	2,206	
			171 7,8	261 34,4	2,759	2,649	
94	Aurora	20 57,2	5 18,8	120 35,1	2,869	2,210	aussen
			171 35,4	126 26,8	3,365	2,944	
95	Arethusa	15 27,0	126 29,1	241 45,4	2,839	2,228	aussen
			54 17,5	265 36,9	3,040	2,974	
96	Aegle	18 16,6	164 7,1	279 23,4	2,397	2,605	aussen
			12 50,1	172 29,9	3,475	2,624	
97	Klotho	2 29,0	54 51,2	170 7,5	3,335	1,996	
			64 37,8	159 53,7	3,283	2,014	
98	Ianthe	28 34,0	2 4,0	117 20,3	2,827	2,235	
			178 29,2	24 3,8	2,207	3,135	
99	Dike	24 15,4	27 1,1	142 17,4	3,128	2,078	
			154 45,5	315 53,6	2,252	3,182	
100	Hekate	9 20,4	27 33,5	142 49,8	3,134	2,075	aussen
			69 31,3	250 3,6	3,189	2,847	
101	Helena	23 8,8	176 50,8	292 7,1	2,278	2,762	
			4 1,6	19 48,9	2,243	2,917	
102	Miriam	9 45,8	159 56,1	275 12,4	2,441	2,556	
			119 17,7	336 8,4	2,028	3,237	
103	Hera	9 7,0	19 42,3	134 58,6	3,046	2,116	
			53 49,5	229 2,5	2,830	2,553	
104	Klymene	14 57,0	9 0,5	124 16,8	2,915	2,183	aussen
			135 52,3	119 51,8	3,334	2,848	
105	Artemis	9 52,0	39 42,2	154 58,5	3,248	2,028	
			23 5,0	328 18,9	1,999	2,704	
106	Dione	15 3,6	17 15,5	132 31,8	3,017	2,129	aussen
			124 10,9	161 27,5	3,691	2,621	
107	Camilla	3 19,0	163 1,9	278 18,2	2,408	2,592	aussen
			157 30,1	217 54,8	3,687	3,272	
108	Hecuba	17 25,0	0 27,2	115 43,5	2,808	2,248	aussen
			178 40,2	357 35,0	2,883	3,542	
109	Felicitas	20 54,6	5 33,0	120 49,3	2,872	2,208	
			171 2,8	120 2,5	2,886	2,132	
110	Lydia	16 21,4	19 52,3	135 8,6	3,048	2,114	
			132 50,9	212 49,4	2,906	2,551	

Zeichen	Namen der Planeten	J	Nördlicher Schnitt			Südl. Schnitt	
			U	V	R	R'	
111	Ate	16° 54,6′	168° 3,6′	283° 19,9′	2,358	2,653	
			32 45,2	230 16,8	2,749	2,402	
112	Iphigenia	15 24,0	175 35,1	290 51,4	2,289	2,746	innen
			22 21,1	8 26,5	2,126	2,739	
113	Amalthea	10 18,4	21 13,5	136 29,8	3,064	2,107	
			68 23,5	351 22,5	2,174	2,579	
114	Kassandra	8 9,6	3 42,6	118 58,9	2,850	2,222	
			9 49,0	21 27,3	2,319	3,017	
115	Thyra	22 58,2	160 2,0	275 18,3	2,558	2,438	innen
			22 33,0	288 36,1	2,443	2,160	
116	Sirona	14 25,6	13 57,3	129 13,6	2,976	2,150	
			119 44,9	31 31,1	2,415	3,084	
117	Lomia	27 58,8	179 26,5	294 42,8	2,256	2,794	
			0 29,1	301 22,1	2,774	2,279	
118	Peitho	18 27,8	21 1,4	136 17,7	3,061	2,108	
			143 26,8	113 25,4	2,538	2,233	
119	Althaea	8 47,0	158 54,5	274 10,8	2,544	2,451	
			126 1,7	317 30,4	2,729	2,420	
120	Lachesis	19 57,8	177 7,6	292 23,9	2,276	2,766	aussen
			5 19,6	126 14,5	3,209	3,016	
121	Hermione	15 28,8	29 34,9	144 51,2	3,155	2,066	aussen
			122 35,7	300 47,8	3,200	3,638	
122	Gerda	11 25,8	178 51,6	294 7,9	2,262	2,788	aussen
			170 49,0	145 5,4	3,320	3,106	
123	Brunhild	18 16,4	166 9,4	281 25,7	2,377	2,629	aussen
			28 52,6	267 22,2	2,671	2,641	
124	Alkeste	10 16,4	174 56,7	290 13,0	2,295	2,738	
			157 8,5	100 42,8	2,653	2,577	
125	Liberatrix	8 23,8	0 36,9	115 53,2	2,809	2,246	
			1 43,1	258 20,6	2,771	2,685	
126	Velleda	15 34,6	5 52,8	121 9,1	2,864	2,213	innen
			153 14,0	188 35,3	2,695	2,183	
127	Johanna	20 0,0	16 3,9	131 20,2	3,003	2,137	
			154 20,7	66 6,3	2,671	2,821	
128	Nemesis	14 49,8	25 9,5	140 25,8	3,107	2,086	
			118 34,3	178 18,2	3,104	2,399	
129	Antigone	7 5,6	67 14,6	182 30,9	3,351	1,990	
			99 13,8	355 24,3	2,278	3,472	

Zeichen	Namen der Planeten	J	Nördlicher Schnitt			Südl. Schnitt	
			U	V	R	R'	
130	Electra	12° 16′,4	130° 14′,4	245° 30′,7	2,792	2,258	aussen
			153 47,2	279 15,7	2,891	3,091	
131	Vala	14 55,6	17 38,0	132 54,3	3,021	2,127	
			122 29,6	289 52,3	2,340	2,473	
132	Aethra	27 45,6	115 7,4	230 23,7	2,981	2,148	
			28 55,4	136 3,7	3,519	1,997	
133	Cyrene	19 37,8	169 22,0	284 38,3	2,345	2,669	aussen
			19 18,0	93 12,6	3,021	2,974	
134	Sophrosyne	24 36,4	177 52,5	293 8,8	2,269	2,775	
			2 22,5	281 13,6	2,472	2,587	
135	Hertha	15 19,2	178 58,6	294 14,9	2,261	2,789	
			5 43,6	29 44,9	1,974	2,830	
136	Austria	4 34,0	146 16,4	261 32,7	2,594	2,407	
			131 6,6	1 7,5	2,092	2,480	
137	Meliboea	7 36,0	103 56,1	219 12,4	3,111	2,085	
			71 3,7	337 27,7	2,510	3,700	
138	Tolosa	14 42,6	11 30,8	126 47,1	2,947	2,166	innen
			127 0,8	230 27,5	2,658	2,161	
139	Juewa	23 54,2	5 27,9	120 44,2	2,871	2,209	
			173 30,9	11 18,1	2,292	3,258	
140	Siwa	11 56,4	13 57,4	129 13,7	2,978	2,150	
			77 10,6	243 59,9	2,877	2,377	
141	Lumen	24 1,4	164 34,7	299 51,0	2,216	2,860	
			16 48,7	322 3,6	2,182	3,059	
142	Polana	14 19,0	172 15,8	287 32,1	2,318	2,704	
			50 51,8	123 14,9	2,569	2,212	
143	Adria	24 15,4	171 51,2	287 7,5	2,322	2,699	
			9 12,8	120 27,3	2,695	2,347	
144	Vibilia	14 10,2	19 57,5	135 13,8	3,049	2,114	aussen
			113 16,7	182 52,7	4,122	2,556	
145	Adeona	18 17,2	42 34,1	157 50,4	3,269	2,020	
			134 10,1	93 21,0	2,642	2,603	
146	Lucina	17 54,0	42 58,4	158 14,7	3,273	2,018	
			138 4,6	6 15,9	2,535	2,909	
147	Protogeneia	12 51,0	171 32,8	286 49,1	2,325	2,696	aussen
			91 10,4	316 26,2	3,078	3,194	
148	Gallia	14 37,8	133 15,8	248 32,1	2,754	2,284	
			157 28,0	246 33,8	2,704	2,646	

Zeichen	Namen der Planeten	J	Nördlicher Schnitt			Südl. Schnitt	
			U	V	R	R'	
149	Medusa	11° 56,6′	0° 58,3′	116° 14,6′	2,815	2,244	innen
			11 28,7	284 55,2	2,040	2,169	
150	Nuwa	11 23,0	173 27,8	288 44,1	2,308	2,720	aussen
			136 38,8	347 10,7	2,601	3,356	
151	Abundantia	17 57,8	15 45,6	131 1,9	2,999	2,139	
			147 0,2	18 30,5	2,502	2,679	
152	Atala	22 45,0	25 6,8	140 23,1	3,107	2,087	aussen
			153 6,8	109 48,9	3,207	3,024	
153	Hilda	11 0,4	142 28,6	257 44,9	2,640	2,369	aussen
			85 34,4	28 7,1	3,330	4,523	
154	Bertha	31 16,8	30 17,6	145 33,9	3,162	2,063	
			161 30,0	14 45,7	2,931	3,451	
155	Scylla	24 18,0	27 50,7	143 7,0	3,138	2,073	
			154 21,1	115 12,0	3,055	2,454	
156	Xanthippe	13 16,2	146 41,8	261 58,1	2,411	2,588	
			71 57,2	162 10,7	3,531	2,356	
157	Dejanira	20 14,8	34 56,6	150 12,9	3,207	2,045	
			141 45,8	96 52,7	2,532	2,407	
158	Koronis	13 24,4	175 58,1	291 14,4	2,287	2,751	aussen
			65 31,5	288 43,9	2,812	2,909	
159	Aemilia	8 47,4	23 41,8	138 58,1	3,091	2,094	
			58 43,6	92 37,8	3,086	3,055	
160	Una	16 43,0	4 17,8	119 34,1	2,856	2,218	
			165 27,4	118 51,9	2,803	2,639	
161	Athor	21 32,4	11 43,6	126 59,9	2,950	2,215	innen
			163 17,2	228 33,6	2,562	2,136	
162	Laurentia	17 45,4	15 2,5	130 18,8	2,990	2,143	
			146 56,7	39 25,6	2,585	3,395	
163	Erigone	8 27,2	6 23,2	121 39,5	2,883	2,202	
			17 50,8	84 7,0	2,262	2,336	
164	Eva	18 5,6	61 6,9	176 23,2	3,350	1,991	innen
			151 28,5	229 18,8	2,994	1,888	
165	Loreley	22 14,8	158 6,9	273 23,2	2,460	2,535	aussen
			25 35,5	52 44,3	2,969	3,258	
166	Rhodope	8 47,0	63 49,0	179 5,3	3,352	1,989	
			104 0,8	202 42,9	3,204	2,146	
167	Urda	11 19,2	0 4,8	116 21,1	2,816	2,243	aussen
			0 37,0	138 5,1	3,784	2,357	

Zeichen	Namen der Planeten	J	Nördlicher Schnitt			Südl. Schnitt	
			U	V	R	R'	
168	Sibylla	9° 54,8′	163° 7,3′	278° 23,6′	2,407	2,593	aussen
			124 19,3	321 5,7	3,191	2,563	
169	Zelia	18 31,2	1 11,7	116 28,0	2,817	2,242	innen
			117 11,7	204 55,1	2,633	2,072	
170	Maria	24 50,2	153 13,9	268 30,2	3,165	2,480	
			24 6,9	229 39,1	2,655	2,443	
171	Ophelia	12 21,4	11 16,8	126 33,1	2,945	2,168	
			80 30,2	38 4,7	2,841	3,421	
172	Baucis	22 44,4	171 39,2	286 55,5	2,324	2,697	innen
			10 49,8	14 5,6	2,117	2,639	
173	Ino	5 18,4	92 18,9	207 35,2	3,227	2,037	
			113 46,1	248 44,1	2,841	2,447	
174	Phaedra	24 44,2	169 13,0	284 29,3	2,347	2,667	aussen
			11 31,8	86 57,9	2,777	2,821	
175	Andromache	16 19,4	7 19,2	122 35,5	2,895	2,196	aussen
			154 10,4	244 34,9	3,621	2,679	
176	Idunna	13 1,0	59 47,8	175 4,1	3,348	1,991	aussen
			30 33,8	210 56,0	3,612	2,719	
177	Irma	14 27,4	179 49,9	295 6,2	2,253	2,799	
			1 30,3	325 15,7	2,190	3,226	
178	Belisana	14 5,4	6 56,1	122 12,4	2,889	2,198	
			126 42,1	269 10,0	2,453	2,449	
179	Klytemnästra	14 15,2	146 52,8	262 9,1	2,587	2,413	aussen
			65 9,8	323 32,1	2,701	3,219	
180	Garumna	13 45,2	177 49,1	293 5,4	2,270	2,774	
			33 31,5	221 58,2	3,039	2,351	
181	Eucharis	8 51,6	114 49,1	230 5,4	2,985	2,146	aussen
			140 47,1	189 48,6	3,790	2,441	
182	Elsa	12 16,8	8 31,1	123 47,4	2,909	2,187	innen
			72 28,9	124 20,3	2,607	2,112	
183	Istria	16 6,2	131 50,0	246 26,3	2,781	2,265	innen
			157 30,2	255 25,6	2,692	2,252	
184	Dejopeja	14 11,6	178 46,8	294 3,1	2,262	2,787	aussen
			13 10,2	180 6,4	3,421	2,958	
185	Eunike	11 24,2	144 40,3	259 56,6	2,614	2,390	
			160 44,3	298 49,3	2,539	2,870	
186	Celuta	25 37,6	12 20,4	127 36,7	2,957	2,160	innen
			167 48,6	215 12,0	2,634	2,055	

Zeichen	Namen der Planeten	J	Nördlicher Schnitt				Südl. Schnitt	
			U		V		R	R'	
187	Lamberta	22° 49',8	14° 32',3		129° 48',6		2,984	2,146	
			162	16,5	330	57,3	2,146	3,258	
188	Menippe	14 9,8	130	26,6	245	42,9	2,791	2,259	
			60	34,0	352	40,5	2,212	3,426	
189	Phthia	9 6,4	162	8,0	277	24,3	2,417	2,582	innen
			129	44,6	326	16,3	2,377	2,521	
190	Ismene	6 58,2	174	24,1	289	40,4	2,299	2,731	aussen
			168	6,3	239	51,0	4,176	3,548	
191	Kolga	2 19,0	3	33,8	118	50,1	2,847	2,223	aussen
			14	6,0	157	36,6	3,104	2,667	
192	Nausikaa	19 51,6	177	25,3	292	41,6	2,273	2,769	
			4	51,9	337	34,3	1,839	2,922	
193	Ambrosia	24 39,2	0	16,8	115	33,1	2,805	2,250	
			179	41,2	100	4,2	2,491	2,254	
194	Prokne	6 10,4	144	56,9	260	13,2	2,610	2,393	
			155	49,1	355	31,9	1,999	3,238	
195	Eurykleia	20 2,8	6	25,8	121	42,1	2,883	2,202	
			168	28,2	70	3,6	2,761	2,940	
196	Philomele	15 39,8	27	44,7	143	1,0	3,136	2,074	
			124	5,5	205	13,0	3,104	3,073	
197	Arete	15 29,2	34	54,6	150	10,9	3,206	2,045	
			122	26,6	239	48,8	2,909	2,464	
198	Ampella	16 59,6	146	51,1	262	7,4	2,587	2,413	
			49	45,5	323	43,1	1,971	2,847	
199	Byblis	18 13,8	55	36,0	170	52,3	3,338	1,995	
			135	27,2	325	2,8	2,754	3,600	
200	Dynamene	7 22,0	156	22,1	271	37,4	2,474	2,515	aussen
			131	28,7	50	16,2	2,477	2,941	

Die Junobahn nähert sich hiernach den Bahnen folgender 48 Planeten in der Schnittlinie ihrer Ebenen bis auf Entfernungen unter 0,1 (N und S deuten wiederum an, ob nördlich oder südlich von der Ekliptik):

19	Fortuna	0,033	S
21	Lutetia	0,054	S
22	Kalliope	0,092	N
24	Themis	0,065	N

27	Euterpe	0,082	S
31	Euphrosyne	0,018	N
32	Pomona	0,083	S
40	Harmonia	0,044	S
63	Ausonia	0,008	N
66	Maja	0,014	N
69	Hesperia	0,048	S
71	Niobe	0,021	S
72	Feronia	0,084	S
77	Frigga	0,057	N
79	Eurynome	0,062	S
81	Terpsichore	0,043	S
84	Klio	0,014	S
88	Thisbe	0,084	N
92	Undina	0,011	N
96	Aegle	0,019	S
97	Klotho	0,052	N
		0,018	S
100	Hekate	0,055	N
101	Helena	0,035	N
109	Felicitas	0,006	N
		0,076	S
112	Iphigenia	0,007	S
119	Althäa	0,031	S
121	Hermione	0,045	N
123	Brunhild	0,012	S
125	Liberatrix	0,038	N
126	Velleda	0,030	S
128	Nemesis	0,003	N
135	Hertha	0,041	S
136	Austria	0,073	S
138	Tolosa	0,005	S
141	Lumen	0,034	N
148	Gallia	0,050	N
149	Medusa	0,075	S
155	Scylla	0,083	N
159	Aemilia	0,005	N
160	Una	0,053	N
161	Athor	0,079	S

170	Maria	0,037	S
172	Baucis	0,058	S
183	Istria	0,089	N
		0,013	S
185	Eunike	0,075	N
193	Ambrosia	0,004	S
196	Philomela	0,032	N
200	Dynamene	0,003	N

Für die 8 Planetenpaare, welche Entfernungen unter 0,01 lieferten — ausser für Juno-Dynamene —, wurden die Proximitäten berechnet. Die für Juno-Klotho (pag. 39) bereits erwähnte Proximität, die etwas über der genannten Grenze liegt, wurde hier wiederholt. Jede obere Reihe bezieht sich auf Juno, die jedesmal folgende auf den angegebenen Planeten. Zum Vergleich sind die excentrischen Anomalieen sowohl für die Proximität, als für die Schnittlinie der beiden Bahnen (Knotenlinie) angeführt. $\triangle$ ist die kürzeste Distanz.

3	Juno und	E Knotenlinie	E Proximität	$\triangle$
63	Ausonia	304° 28′,6	304° 8′,6	0,0029
		69 34,8	69 11,8	
97	Klotho	352 23,0	357 23,0	0,0104
		344 26,6	349 29,3	
109	Felicitas	107 13,8	106 59,4	0,0125
		103 39,2	103 20,9	
112	Iphigenia	96 23,2	95 47,6	0,007
		189 35,4	188 58,2	
128	Nemesis	129 57,6	129 56,5	0,003
		178 4,2	178 5,1	
138	Tolosa	317 47,6	317 47,6	0,005
		43 36,8	43 38,1	
159	Aemilia	128 11,8	125 58,8	0,0031
		86 20,0	84 34,6	
193	Ambrosia	308 11,2	308 15,4	0,0036
		295 59,2	296 5,1	

Der Zweck der vorliegenden Arbeit gestattet nicht, aus den vorstehenden, für die Lage der Junobahn zwischen den Asteroidenbahnen gefundenen Daten weitere Resultate abzu-

leiten. Bei einer Untersuchung, ob Störungen der Juno durch andere kleine Planeten angenommen werden können, würde noch auf zweierlei Rücksicht genommen werden müssen, ob an bestimmten Stellen der Junobahn Anhäufungen von mehreren Planeten stattfinden können, und ob einzelne Planeten längere Zeit in der Nähe der Juno verweilen. In beiden Fällen erscheinen Einwirkungen auch bei nicht ganz kleinen Proximitäten möglich.

Nur eine Bemerkung ergab sich ganz beiläufig für die Lage der Junobahn und möge hier noch angeführt werden, dass sie nämlich 23 Asteroidenbahnen umschliesst (darunter eine[61]) mit grösserer mittlerer Entfernung), während 55 Bahnen (darunter zwei mit kleinerer Axe)[62]) ausserhalb derselben liegen. 122 Bahnen dagegen hängen mit ihr wie Kettenringe zusammen.

Das einfache Merkmal, welches darüber entscheidet, hat Linsser angegeben: Haben die Differenzen der Radien in der Schnittlinie der Bahnen gleiches Zeichen, so umschliessen sich diese, bei ungleichem Zeichen greifen sie ineinander (Denkschriften XVI, pag. 92).

Zur Veranschaulichung der ganzen Rechnung möge hier noch ein Beispiel in extenso folgen. Es wurde dazu gewählt:[63])

(48) Doris — (202) Chryseis.

Die Elemente sind dem Jahrbuch für 1883 entnommen. Die Grössen ohne Index beziehen sich auf Doris, die mit dem Index auf Chryseis.

1. Berechnung der gegenseitigen Neigung J der Bahnen, der Argumente der Breite U und U_1, der wahren Anomalieen

---

[61]) (183) Istria. Nicht viel kleiner als die mittlere Entfernung von Juno ist die von (164) Eva.

[62]) (66) Maja und (144) Vibilia. Die kleinsten mittleren Entfernungen unter den andern ausserhalb liegenden haben (59) Elpis und (123) Brunhilda.

[63]) Da die Bahnelemente von (202) Chryseis noch unsicher sind, ist das folgende nur als ein Rechnungsbeispiel zu betrachten.

V und V_1, der Radien-Vectoren R und R_1, sämmtlich für die Knotenlinie. (Vergl. (1) und (2) auf pag. 17, 18 und pag. 22, 23.)[64])

	Ω_1 137° 48′,4		i_1 8° 48′,0		φ_1 5° 34′,3
	Ω 184 55,1		i 6 30,7		φ 3 43,2
	$\Omega_1 - \Omega$ 312 53,3		$i_1 + i$ 15 18,7		$i_1 - i$ 2 17,3
	$\frac{1}{2}$ 156 26,6		7 39,4		1 8,6
		I $\sin\frac{i_1+i}{2}$ 9,1246		III $\sin\frac{i_1-i}{2}$ 8,2966	
		II $\sin\frac{\Omega_1-\Omega}{2}$ 9,6017		IV $\cos\frac{\Omega_1-\Omega}{2}$ 9,9622$_n$	
		$\cos\frac{i_1+i}{2}$ 9,9961		$\cos\frac{i_1-i}{2}$ 9,9999	
$\frac{1}{2}(U+U_1)$	108 49,0	I 8,7263		II 9,5978	
$\frac{1}{2}(U-U_1)$	156 37,4	III 8,2588$_n$		IV 9,9621$_n$	
		9,9761		9,9628	
		$\sin\frac{J}{2}$ 8,7502		$\cos\frac{J}{2}$ 9,9993	
	J 6 27,0	$\frac{J}{2}$ 3 13,5		Prüf. 9,9993	
		U 265 26,4		U_1 312 11,6	
Prüfung für die R:		ω 245 38,4		ω_1 349 54,9	
		V 19 48,0		V_1 322 16,7	
$\frac{1}{R}$ 0,3423		$\cos V$ 9,9735		$\cos V_1$ 9,8982	
		$\sin\varphi$ 8,8121		$\sin\varphi_1$ 8,9872	
$\frac{1}{R'}$ 3030		$\sin\varphi \,.\, \cos V$ 0,0610		$\sin\varphi_1 \,.\, \cos V_1$ 0,0768	
		$\cos\varphi$ 9,9991		$\cos\varphi_1$ 9,9979	
$\frac{2}{p}$ 6452		$\cos^2\varphi$ 9,9982		$\cos^2\varphi_1$ 9,9958	
		a 0,4931		a_1 0,4892	
$\frac{1}{R_1}$ 0,3525		$1 + e\cos V$ 0,0257		$1 + e_1\cos V_1$ 0,0321	
		p 0,4913		p_1 0,4850	
$\frac{1}{R'_1}$ 3022		$1 - e\cos V$ 9,9727		$1 - e_1\cos V_1$ 9,9653	
$\frac{2}{p_1}$ 6548		$\lg R$ 0,4656		$\lg R_1$ 0,4529	
		$\lg R'$ 0,5186		$\lg R'_1$ 0,5197	

[64]) Bei einer Combination eines Planeten mit einer grösseren Anzahl anderer, wie dies bei Juno der Fall war, erscheint eine etwas modificirte Anlage der Rechnung empfehlenswerth. Die auf Juno bezüglichen Grössen

2. Berechnung der Constanten $\cos\varepsilon$, $\cos\zeta$, $\cos\vartheta$, $\cos\eta$, sowie S und S_1 und Verwandlung der wahren in excentrische Anomalieen. (Gleichungen (3) pag. 18 vergl. pag. 23, 24, 25.) Berechnung der α, β, α_1, β_1, A, B, A_1, B_1 aus (4) (pag. 21).[65])

(V) 199° 48′,0	$\frac{1}{2}V$ 99° 54′,0	$\frac{1}{2}V_1$ 71° 8′,4
(V_1) 142 16,7	$(\cos\varphi)$ 9,9991	$(\cos\varphi_1)$ 9,9979
$(\cos V)$ 9,9735$_n$	$1+\sin\varphi$ 0,0273	$1+\sin\varphi_1$ 0,0403
$(\cos V_1)$ 8,8982$_n$	$\frac{1-e}{1+e}$ 9,9718	$\frac{1-e_1}{1+e_1}$ 9,9576
$\sin V$ 9,5299	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}V$ 0,7581$_n$	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}V_1$ 0,4664
$\sin V_1$ 9,7866	$\frac{1}{2}E$ 100 33,0	$\frac{1}{2}E_1$ 69 21,5
$\cos J$ 9,9972		
	$(\lg R)$ 0,5186	$(\lg R_1)$ 0,5197
I $\cos V.\cos V_1$ 9,8717	$(\sin\varphi)$ 8,8121	$(\sin\varphi_1)$ 8,9872
II $\sin V.\cos V_1$ 9,4281	9,3307	9,5069
III $\cos V.\sin V_1$ 9,7601$_n$	(a_1) 0,4892	(a) 0,4931
IV $\sin V.\sin V_1$ 9,3165$_n$	8,8415	9,0138
+ I + 0,7442		
+ IV $\cos J$ — 0,2059	$\frac{R_1}{a}\sin\varphi_1$ + 0,1032	$\frac{R}{a_1}\sin\varphi$ + 0,0694
+ III — 0,5756	$-\cos\varepsilon.\sin\varphi$ — 0,0349	$-\cos\varepsilon\sin\varphi_1$ — 0,0523
— II $\cos J$ — 0,2662	S + 0,0683	S_1 + 0,0171
+ II + 0,2680	dS + 0,0005	dS_1 — 0,0001
— III $\cos J$ + 0,5719		
+ IV — 0,2072	$(\cos\zeta)$ 9,9252$_n$	$(\cos\varepsilon)$ 9,7310
+ I $\cos J$ + 0,7395	$\cos\varphi\cos\eta$ 9,7252	$\cos\varphi\cos\vartheta$ 9,9233
$\cos\varepsilon$ 9,7310	A 302 15,0	B 32 42,6
$\cos\zeta$ 9,9252$_n$	$\operatorname{cs} A$ 9,9272	$\operatorname{cs} B$ 9,9250
$\cos\vartheta$ 9,9242	α 9,9980	β 9,9983
$\cos\eta$ 9,7261	$(\cos\vartheta)$ 9,9242	$(\cos\varepsilon)$ 9,7310
$\cos\vartheta-\cos\zeta$ 0,2257	$\cos\varphi_1.\cos\eta$ 9,7240	$\cos\varphi_1\cos\zeta$ 9,9231
$\cos\varepsilon+\cos\eta$ 0,0206	A_1 57 45,7	B_1 147 16,7
	$\operatorname{cs} A_1$ 9,9273	$\operatorname{cs} B_1$ 9,9250
Prüfung: $V-V_1$ 57° 31′,3	α_1 9,9969	β_1 9,9981

wurden auf ein besonderes Blatt geschrieben, soweit sie für alle Combinationen dieselben waren.

[65]) Die in Klammern geschlossenen Grössen sind der vorhergehenden Rechnung unmittelbar entnommen.

dS und dS_1 sind durch folgende kleine Rechnung gefunden, der die Formeln auf pag. 25 zu Grunde liegen. Es wurde $dE = dE_1 = 5^0$ angenommen. Es ist ferner nach dem obigen $E = 201^0\ 6{,}'0$ $E_1 = 138^0\ 43{,}'0$

$\frac{a_1}{a}$	9,9961	$\frac{a}{a_1}$	0,0039
$\sin^2\varphi_1$	7,9744	$\sin^2\varphi$	7,6242
	6,9113		6,5689
$\sin E_1$	9,8193	$\sin E$	$9{,}5563_n$
dS	6,7306	dS_1	$6{,}1252_n$

3. Auflösung der Gleichungen (5) (pag. 21) durch Interpolation aus drei Versuchen.

Für E wird einmal sein Werth in der Knotenlinie und 2 um je 5^0 von diesem abliegende Werthe angenommen.

E	$196^0\ 6{,}'0$	$201^0\ 6{,}'0$	$206^0\ 6{,}'0$
$E + B$	228 48,6	233 48,6	238 48,6
$\sin(E+B)$	$9{,}8765_n$	$9{,}9069_n$	$9{,}9322_n$
$\beta \sin(E+B)$	− 0,7495	− 0,8038	− 0,8522
S	+ 0,0678	+ 0,0683	+ 0,0688
Nenner	− 0,6817	− 0,7355	− 0,7834
$E + A$	138 21,0	143 21,0	148 21,0
$\sin(E+A)$	9,8226	9,7759	9,7199
$\alpha \sin(E+A)$	9,8206	9,7739	9,7179
$-\cos\zeta \sin\varphi$	8,7373	8,7373	8,7373
$G.\ L.$	1,1177	1,0748	1,0237
Summe	9,8550	9,8121	9,7610
$\lg Z_1$	9,8529	9,8100	9,7589
$\lg N_1$	$9{,}8336_n$	$9{,}8666_n$	$9{,}8940_n$
E_1	133 43,6	138 43,5	143 46,3

E_1	$133^0\ 43{,}'6$	$138^0\ 43{,}'5$	$143^0\ 46{,}'3$
$(E_1 + B_1)$	281 0,3	286 0,2	291 3,0
$\sin(E_1+B_1)$	$9{,}9919_n$	$9{,}9828_n$	$9{,}9700_n$
$\beta_1 \sin(E_1+B_1)$	− 0,9772	− 0,9570	− 0,9292
S_1	+ 0,0172	+ 0,0171	+ 0,0170
Nenner	− 0,9600	− 0,9399	− 0,9122
$E_1 + A_1$	191 29,3	196 29,2	201 32,0
$\sin(E_1+A_1)$	$9{,}2993_n$	$9{,}4530_n$	$9{,}5647_n$
$\alpha_1 \sin(E_1+A_1)$	$9{,}2962_n$	$9{,}4499_n$	$9{,}5616_n$
$-\cos\zeta . \sin\varphi_1$	$8{,}9114_n$	$8{,}9114_n$	$8{,}9114_n$
$G.\ L.$	0,5347	0,6489	0,7379
Summe	$9{,}4461_n$	$9{,}5603_n$	$9{,}6493_n$
$\lg Z$	$9{,}4452_n$	$9{,}5594_n$	$9{,}6484_n$
$\lg N$	$9{,}9823_n$	$9{,}9731_n$	$9{,}9601_n$
E'	196 11,5	201 5,7	205 58,4

Für die drei verschiedenen Annahmen für E ergeben sich demnach folgende Differenzen $E' - E$: + 5,'5 − 0,'3 und − 7,'6. Interpolirt man den Werth von E, für welchen $E' - E$ verschwindet, so erhält man

$$E = 200^0\ 50{,}'2 \qquad E_1 = 138^0\ 28{,}'0$$

4. Hieraus findet man die Grösse der kürzesten Distanz nach pag. 26, 27. Bei der geringen Entfernung der Proximität von der Knotenlinie könnte man dieselbe ohne weiteres der Differenz der Radien gleichsetzen; nur um ein auch für andere Fälle geltendes Paradigma zu haben, wird hiervon im folgenden abgesehen.

$\cos E$	9,9706$_n$	$\cos E_1$	9,8743$_n$	$\frac{1}{2} E$	$100^0 25'{,}1$	$\frac{1}{2} E_1$	$69^0 14'{,}0$
$e \cos E$	8,7827$_n$	$e_1 \cos E_1$	8,8615$_n$	$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E$	0,7355$_n$	$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E_1$	0,4211
(a)	0,4931	(a_1)	0,4892	$\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$	0,0282	$\sqrt{\frac{1+e_1}{1-e_1}}$	0,0424
$1 - e \cos E$	0,0256	$1 - e_1 \cos E_1$	0,0305	$\frac{1}{2} v$	99 46,6	$\frac{1}{2} v_1$	71 1,2
$\lg r$	0,5187	$\lg r_1$	0,5197	v	199 33,2	v_1	142 2,4
r	3,302	r_1	3,309	V	199 48,0	V_1	142 16,7
				$V - v$	14′8	$V_1 - v_1$	14′3

$\frac{1}{2}$ (Summe) 14′6
$\frac{1}{2}$ (Differenz) 0,2

$$\sin \frac{(V - v) - (V_1 - v_1)}{2} \quad 5{,}7648$$

$$\left(\cos \frac{J}{2}\right) \quad 9{,}9993$$

$$\left(\sin \frac{J}{2}\right) \quad 8{,}7502$$

$$\sin \frac{(V - v) + (V_1 - v_1)}{2} \quad 7{,}6281$$

5,7641
6,3783
9,9875

$$\sin \frac{\psi}{2} \quad 6{,}3908$$

$r_1 + r$ 0,8203

$r_1 - r$ 7,8451

$$\cos \frac{\psi}{2} \quad 0{,}0000$$

7,2111
7,8451
9,9886

lg △ 7,8565
△ 0,00719

5. Zeit der Proximität. (Vergl. pag. 27.)

Zunächst berechnet man die mittleren Anomalieen in der Proximität.

E^0	200° 50,'2	$E_1{}^0$	138° 28,'0
$\sin E^0$	9,5511$_n$	$\sin E_1{}^0$	9,8216
$\sin \varphi$ (in Min)	2,3484	$\sin \varphi_1$	2,5235
$\sin \varphi \sin E^0$	— 1° 19,'3	$\sin \varphi_1 \sin E_1{}^0$	+ 3° 41,'4
M^0	202 9, 5	$M_1{}^0$	134 46, 6

Nun war nach dem Berl. astron. Jahrbuch für 1883 die mittlere Anomalie für

Doris	1880 Dec. 4,0	M	= 2° 52,'7
Chryseis	1879 Dec. 7,5	M_1	= 249 29, 5

Hieraus hat man

$$M - M^0 = 160^0\ 43,'2 \quad M_1 - M_1{}^0\ 114^0\ 42,'9$$

In Sekunden ausgedrückt liefern diese Zahlen folgende Logarithmen

5,76237 5,61592

Nun ist

$\lg \mu$ 2,81031 $\lg \mu_1$ 2,81625

Folglich befanden sich die Planeten

$895,^d5$ $630,^d47$

vor den angegebenen Zeitmomenten einzeln am Orte der Proximität, nämlich

Doris 1878 Juni 24,5 Chryseis 1878 März 17,0

also zu 2 um $99,^d5$ auseinander liegenden Zeiten.

Berechnet man noch die Umlaufszeiten U und U_1

$\lg 2\pi$ (in Sekunden)	6,11261
$\lg \mu$	2,81031
$\lg \mu_1$	2,81625
U	$2005,^d9$
U_1	1978, 6

so hat man die folgende unbestimmte Gleichung aufzulösen

$$2005{,}9\ .\ x - 1978{,}6\ .\ y = 99{,}5$$

oder da die Zahlen links 13 als gemeinschaftlichen Theiler haben, so kann man schreiben (indem 995 nicht ein genaues vielfaches von 13 ist, also eine strenge Lösung nicht möglich ist)

$$1543\ .\ x - 1522\ y = 76$$

Die Näherungsbrüche von $\frac{1522}{1543}$ sind nun

$$\frac{1}{1} \qquad \frac{72}{73} \qquad \frac{145}{147}$$

Nimmt man 72 und 73 für U und U_1, so wird jetzt die Gleichung

$$73\ x - 72\ y = 4$$

und es folgen die Lösungen $x = 4 \quad y = 4$.

Geht man von dem Zeitpunkte 1878 Juni 24,5, in dem sich (48) am Orte der Proximität befand, um 4 Umläufe desselben zurück, so gelangt man zu

1856 Juli 6

(202) befand sich dagegen 1878 März 17,0 am Orte der Proximität. Um 4 Umläufe früher d. i.

1856 Juli 16

würde er sich ebenfalls in der Proximität befunden haben. Man würde hiernach für diese Zeit (1856 Juli 11) eine zeitliche Proximität der Planeten Doris — Chryseis annehmen können, die ungefähr 1 Jahr vor der Entdeckung der Doris durch Goldschmidt stattgefunden hätte. Zugleich geht aus dieser Rechnung hervor, dass die Uebereinstimmung der Oerter der genannten Planeten, wie sie sich in den Jahresephemeriden für 1881 (im Jahrbuch für 1883) fand, noch keine genügende ist, um eine Proximität für diese Zeit anzunehmen.

Der Zeitraum zwischen 2 Proximitäten beträgt, wenn man $\frac{1543}{73}$ d. i. ungefähr 20 Tage Verspätung des einen Planeten gegen den andern nicht in Betracht ziehen will, 72 Umläufe von Doris oder 73 von Chryseis. (Thatsächlich unterscheiden sich diesebeiden Zeiten um weniger als 20, nämlich um 13 Tage.) Diese Zwischenzeit von fast 400 Jahren ist bei diesen Planeten wegen der geringen Verschiedenheit ihrer mittleren Bewegungen besonders gross.[64])

---

[66]) Der vor $\frac{72}{73}$ vorhergehende Näherungsbruch ist $\frac{1}{1}$. Die beiden Umlaufszeiten unterscheiden sich allerdings auch nur um 37^d, doch kann man nicht wohl viel über 10^d hinausgehen, wenn von einer Proximität die Rede sein soll. (cf. Littrow, Denkschr. XVI, pag. 76.)

6. Dauer der Proximität (pag. 41).

Für die Proximität sind die mittleren Anomalieen

M^0 202° 9,'5 $M_1{}^0$ 134° 46,'6

für eine um 20 Tage spätere Zeit ergeben sie sich

M 205 44, 9 M_1 138 24, 9

Durch Auflösung der Kepler'schen Gleichung erhält man die zugehörigen excentrischen Anomalieen

E 204 13, 4 E_1 141 51, 1

und nunmehr in ganz analoger Weise wie unter 4. (auf pag. 57) die Distanz der beiden Orte $\lg D' = 9{,}5336$

Da ferner $\lg \triangle = 7{,}8565$ gefunden wurde, so ergiebt sich mit Hilfe Gauss'scher Logarithmen

	1,6677 der log der Differenz
$\lg (D' - \triangle)$	9,5242
$\lg (20)^2$	2,6021 Mithin ergiebt sich
$\lg f$	6,9221

Ist also die Zeit gesucht, innerhalb deren sich die Distanz unter der Grösse 0,05 hält, so ist in der Gleichung $D = \triangle + f(t - t^0)^2$ (pag. 30) $D = 0{,}05$ zu setzen.

D	$= 0{,}050$
$\triangle$	$= 0{,}007$
$\lg 0{,}043$	$= 8{,}6335$
$\lg f$	6,9221
$\lg (t - t^0)^2$	1,7114
$\lg (t - t^0)$	0,8558
$t_1 - t^0$	$7,^{\mathrm{d}}172$
$t_1 - t_2$	$14,^{\mathrm{d}}34.$

Vita.

Andreas Guilelmus Godofredus Galle natus sum Vratislaviae a. d. X. kal. Jul. anni h. s. LVIII patre Joanne Godofredo professore p. o. directore observatorii regii et matre Maria e gente Regenbrecht. Fidem profiteor evangelicam. Gymnasium frequentavi Mariae Magdalenae sanctum, cujus praeceptoribus benevolentissimis doctissimisque maximam ego gratiam habeo. Vere a. h. s. LXXVII testimonium maturitatis adeptus in numerum civium academicorum clarissimae Georgiae Augustae receptus sum. Tribus semestribus peractis Gottinga in patriam redii in universitate Viadrina studiis me traditurus, ubi, uno semestri quo Berolini scholas mathematicorum adii, excepto, literarum studia absolvi. Post autumnum a. h. s. LXXX observatorii regii assistentis munere usque ad hoc tempus functus sum.

Scholas frequentavi vir. ill. Auerbach, Baumann, H. Bruns, F. Cohn, Dilthey, Dorn, Drude, Ehlers, Enneper, Foerster, Galle, Goedeke, G. Kirchhoff, Klinkerfues, Kummer, Liebisch, Loewig, Lotze (†), O. E. Meyer, Partsch, Riecke, Rosanes, Schottky, Schroeter, H. A. Schwarz, Stern, Tietjen, Ueberhorst, Th. Weber.

Per quatuor semestria Gottingae, Vratislaviae, Berolini seminarii mathematici et physici sodalis fui, per bis sex menses Gottingae et Vratislaviae in laboratorio physico experimentis operam navavi, per unum semestre Vratislaviae cursui anatomiae botanicae adfui.

Magistris meis semper colendis qui magna omnes benevolentia me adjuverunt et literarum amorem in me excitaverunt et foverunt, gratias ago quam maximas.

Thesen.

1. Der gegenwärtige Stand der Wissenschaft gestattet keine Bestimmung der Rotationszeit der Sonne aus der Umlaufszeit ihrer Flecken.
2. Es ist empfehlenswerth ausser den üblichen Howard'schen Wolkenbezeichnungen in Anlehnung an Poëy noch die Benennungen Pallium, Cirropallium, Cumulopallium einzuführen.
3. Der Ausdruck, dass eine Grösse unendlich klein sei, hat in den Anwendungen der Differentialrechnung nur eine relative Bedeutung.
4. Die Staudt'sche Definition projectivischer Gebilde hat Vorzüge vor der Steiner'schen.
5. Das Streben nach Objectivität ist die Grundbedingung jeder Geschichtsschreibung.